

Der Cost Average Effekt in der Anlageberatung – Einsatzmöglichkeiten und Grenzen sowie deren mathematische Hintergründe

1. Einführung

Wer Karl Lohmann kennt, der weiß, daß er ein Berufsleben lang sein finanzwirtschaftliches Wissen immer wieder auch in den Dienst von Fragen nach Recht und Gesetz gestellt hat. Es ist ihm ein Anliegen, daß die vielen Probleme, die das Agieren mit Geld bereithält, nicht durch verständigere und besser informierte Wirtschaftssubjekte zum Nachteil anderer ausgenutzt werden.

Der folgende Beitrag steht in dieser Tradition. Er beleuchtet Anlagestrategien, die als Cost Average Strategien (CAS) bezeichnet werden und sich auf Effekte stützen, die unter der Bezeichnung Cost Average Effekt (CAE) zusammengefaßt werden. Der Cost Average Effekt wird in der Praxis immer wieder in Werbemaßnahmen eingebunden, die das Ziel verfolgen, Kapitalgeber zu Anlageentscheidungen zu bewegen. Überdurchschnittlich hohe Renditen werden als leicht erreichbar dargestellt. Dies wirft Fragen nach der Lauterkeit derartiger Werbestrategien auf. Der amerikanische Ökonom Paul A. Samuelson hat 1994 das Werben mit dem Cost Average Effekt als „blunder, if not a crime“ bezeichnet.⁴ In dieser Schärfe stimmen andere Wissenschaftler den Aussagen Samuelsons zwar nicht zu. Und es gibt sogar wissenschaftlichen Ansprüchen genügende Untersuchungen, die auf vorteilhafte Verwendungsmöglichkeiten des Effektes verweisen. Trotzdem: in vielen Fällen ist das Werben mit dem Effekt geeignet, Wirtschaftssubjekte in für sie unvorteilhafte Anlagestrategien zu lenken. Im Folgenden

¹Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz.

²Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz.

³Westfälische Hochschule Zwickau (FH), Fachgruppe Mathematik, Dr.-Friedrichs-Ring 2A, D-08056 Zwickau.

⁴Samuelson (1994), S.15 ff., zit. Nach Ebertz, Scherer (1998), S.84.

wird deshalb untersucht, wo die Grenzen der Einsetzbarkeit der Strategien im Marketing liegen. Es werden Grundsätze für den zulässigen Umgang mit dem Cost Average Effekt im Finanzmarketing definiert (s. Abschnitt 1.3) und für den Fall von Marktteilnehmern ohne überlegene Informationen in zwei Einzelstudien (s. Abschnitte 2 und 3) die Bandbreite zulässiger Aussagen ausführlich abgeleitet. Dabei werden die finanzmathematischen Hintergründe detailliert beleuchtet.

1.1 Der Cost Average Effekt im Finanzmarketing

Seit Jahrzehnten wird Anlegern von Finanzintermediären empfohlen, Anlagen unter Ausnutzung des Cost Average Effektes zu tätigen. In jüngster Zeit hat sich die Werbung mit diesem Effekt wieder belebt.⁵ In Zeiten, in denen Aktienkurse eher stagnieren, Renditen niedrig sind und Anlageempfehlungen nach vorangegangenen Enttäuschungen an Überzeugungskraft verloren haben, bieten sich die regelgebundenen Cost Average-basierten Strategien an, Überrenditen zu erzielen.

Der amerikanische Finanzdienstleister Charles Schwab wirbt z.B.: *„Invest a few times a year is certainly better than nothing, but there is a better way: a systematic method known as Dollar Cost Averaging.“*⁶

Drescher und Cie erinnert die Kunden an die schlechten Erfahrungen in der Baisse der Jahre 2000 bis 2002 und zeigt, wie die Kunden trotzdem hätten gewinnen können: *„Wer hingegen 1999 einen Sparplan in die selben Fonds begann, sich in der Baisse nicht beirren ließ, und sein „Kaufprogramm“ diszipliniert durchzog, wird in diesen Tagen mit Freude beim Studium seiner Depotauszüge feststellen, daß er über mehr Geld in den Positionen verfügt, als er netto eingezahlt hat – und das, obwohl der aktuelle Anteilswert deutlich unterhalb der ersten Kaufpreise des Jahres 1999 lag. Möglich gemacht hat dies der Cost Average Effekt.“*⁷

Auch Bernd Klöckner erinnert an den Crash. Er ermuntert im Versicherungsmagazin die Anleger auch in Zeiten sinkender Börsenkurse zu Investitionen in Kapitallebensversicherungen. Er zeigt an Beispielen mit

⁵Vgl. Langer, Nauhauser (2003) und die dort angegebene Literatur.

⁶Vgl. Leggio, Lien (2003), S.211.

⁷Drescher und Cie (2003), S.1.

historischen Daten, daß auch in Krisenzeiten hohe Renditen erzielbar sind, wenn man nur die Regeln des Cost Average Prinzips einhält.⁸

Dean Knepper rät Certified Public Accountants, bei ihren Beratungen von anlagewilligen Kunden speziell im Alter über 50 Strategien nach dem Cost Average Effekt zu empfehlen.⁹

Die DWS wendet sich an Privatkunden, erinnert an die vielen falschen Tipps, die Anlegern zu Boomzeiten gegeben worden sind und wirbt für Anlagen nach starren Regeln, die den Cost Average Effekt ausnutzen: „*Viel kaufen zu niedrigen Kursen. Wenig kaufen bei hohen Kursen. Das einfachste kaufmännische Prinzip. Nur wann ist der Kurs niedrig? Mit einem Investmentsparplan der DWS investieren Sie zu jedem Zeitpunkt kaufmännisch ‚richtig‘... Im Schnitt kaufen Sie damit günstiger. Damit profitieren Sie vom so genannten Cost Average Effekt.*“¹⁰ Mit drei Zahlenbeispielen für stagnierende, fallende und steigende Kurse verdeutlicht die DWS den Mechanismus. In allen Fällen errechnen sich Überrenditen. Die Berechnungen sind einfach, leicht nachvollziehbar und fehlerfrei. Es drängt sich der Eindruck auf, daß die Überrenditen zwingend eintreten müssen.

1.2 Der Cost Average Effekt in der Literatur

In der wissenschaftlichen Literatur ist der Cost Average Effekt vielfach untersucht worden. Die dabei erzielten Ergebnisse sind jedoch nicht leicht erschließ- und für unsere Fragestellung auswertbar, denn es gibt eine große Vielfalt an Untersuchungsansätzen, mit denen recht unterschiedliche Aussagen erzielt werden.

Einige Autoren kommen zu rundheraus ablehnenden Ergebnissen. Lange und Neuhauser z. B. schlußfolgern, daß der Effekt „*keine praktische Relevanz besitzt und dessen vermeintliche Wirkung auf einem Denkfehler basiert.*“¹¹ Ähnlich grundsätzlich lehnt Statman den Effekt ab: „*The practice of dollar-cost averaging is suboptimal according to the framework of standard finance, but the practice is persistent and widespread.*“¹² Auch

⁸Vgl. Klöckner (2002), S.56f.

⁹Vgl. Knepper (2003), S.17.

¹⁰DWS Investments (2003).

¹¹Langer, Nauhauser (2003), S.1.

¹²Statman (1995) S.70.

Ebertz und Scherer erkennen keinen Vorteil von Cost Average Strategien: „*Folglich ist die Einmalanlage dem Cost Averaging überlegen*“.¹³

Neben diesen ablehnenden Urteilen gibt es eine Gruppe von Analysen, die zu gemischten Aussagen gelangt. Albrecht, Dus, Maurer und Ruckpaul kommen in ihrer Studie zu einem ‚sowohl als auch‘: „*Sowohl These (Überlegenheit des Sparplans) als auch Gegenthese (Überlegenheit des Einmalinvestments) sind nicht generell valide*“.¹⁴ Stephan und Telöken finden den Effekt „überwiegend“ bestätigt.¹⁵ Marosi sowie Balvers und Mitchell sehen einen Vorteil von Cost Average Strategien in ganz bestimmten Marktphasen.¹⁶ Leggio und Lien untersuchen verschiedene Assetklassen und gelangen zu gemischten Ergebnissen, derart daß CA Strategien insbesondere bei der Anlage in Anleihen vorteilhaft und bei volatilen Aktien nachteilig seien.¹⁷ Viele weitere Untersuchungen existieren mit unterschiedlichsten Resultaten.¹⁸

Die Ursachen divergierender Ergebnisse liegen (i) in dem unklaren Begriff des Cost Averaging, der von verschiedenen Autoren in ganz unterschiedlichen Abgrenzungen verwendet wird,¹⁹ (ii) den unterschiedlichen Forschungsansätzen, insbesondere dem – bei historischen Untersuchungen – zugrundeliegenden Datenmaterial, (iii) den verwendeten Performancemaßen und – im Fall von Strategievergleichen – (iv) der Auswahl der einbezogenen Anlagestrategien.

Ein häufig verwendeter Forschungsansatz ist der Vergleich von Einmalanlagen mit Sparplänen. Und auch in der Praxis spielt dieser Vergleich eine Rolle: „*You may be wondering, ,When is the right time to invest my money? And how should I invest – a little bit at a time or all at once?*“²⁰ Aber für die meisten Menschen stellt sich die Frage nach dem Investieren „at once“ überhaupt nicht, weil sie nicht über Anfangsvermögen verfügen,

¹³Ebertz, Scherer (1998), S.86.

¹⁴Albrecht, Dus, Maurer, Ruckpaul (2002), S.13.

¹⁵Vgl. Stephan, Telöken (1997), S.618.

¹⁶Vgl. Marosi (2003), S.37; Balvers, Mitchell (2000), S.21f.

¹⁷Vgl. Leggio, Lien (2003), S.218.

¹⁸Siehe Milevsky (2003), Scherer, Ebertz (2003), Walze u.a. (2003), Stäcker (1999), Marosi (2003), Hall (2000).

¹⁹Er wird z. B. auch benutzt, um zu begründen, daß in Investment*fondsanteile* statt in selbst zusammengestellte Aktienportfolios investiert werden soll; vgl. Drescher und Cie (2003).

²⁰James Patrick von Smith Barney Inc. (s. Patrick, 1996, S.33).

sondern vielmehr aus ihrem regelmäßigen Einkommen einen Teil zurücklegen wollen – sie sparen quasi automatisch nach dem Cost Average Prinzip. Ein Investment „at once“ könnten solche Wirtschaftssubjekte überhaupt nur mittels Kreditaufnahme erreichen, wobei der Kredit aus dem späteren monatlichen Einkommen getilgt werden müßte – bei den üblichen Soll-Haben-Zinsdifferenzen ein vermutlich von vornherein sinnloser Vergleich.

Für Menschen die in jedem Fall aus laufendem Einkommen sparen wollen, sind dagegen folgende Alternativen interessanter, die allesamt untersucht und mit dem Cost Average Effekt in Verbindung gebracht worden sind: ein regelmäßiger Sparbetrag kann in Aktien, Renten oder Liquidität investiert werden. Die Frage lautet hier, ob flexible, von der jeweiligen Markterwartung abhängige oder starre Strategien mit einer festen Aufteilungsregel zu wählen sind. Der Vorzug der letzteren Alternative wird mit dem Cost Average Effekt begründet.²¹ In den USA hat sich folgende Problemstellung ergeben, nachdem Anbieter entsprechende Produkte anboten:²² ein Anleger, der im langjährigen Durchschnitt einen bestimmten Betrag monatlich sparen will, kann diesen Betrag kurzfristig, je nach Marktlage und eigenem Willen steigern oder verringern. Es wird empfohlen, den Betrag konstant zu lassen, was mit dem Cost Average Effekt begründet wird.²³ Weiter wurde vorgeschlagen, die Frequenz des Anlegens zu verändern und z. B. statt monatlich auch in wöchentlichen, quartalsweisen oder auch halbjährlichen Rhythmen in Aktien zu investieren.²⁴ Die Wahl kurzer Rhythmen wird mit dem Cost Average Effekt begründet. Miteinander verglichen wurden auch die folgenden drei Strategien: ein Investor kauft regelmäßig eine gleiche *Anzahl* von Aktien (Strategie I), investiert einen gleichbleibenden *Betrag* in Aktien (Strategie II) oder investiert so, daß seit der letzten Einzahlung eingetretene *Wertänderungen* des Vermögens ausgeglichen werden (Strategie III).²⁵ Eine Präferenz für Strategie II

²¹U.U. kann auch der gesamte angesparte Vermögensbestand in Aktien, Renten oder Liquidität umgeschichtet werden, wie dies bei den amerikanischen 401(k) Sparplänen möglich ist und auch in Deutschland bei Riesterverträgen möglich werden soll.

²²Vgl. Libin (2003), S.21.

²³Vgl. Libin (2003), S.21.

²⁴Vgl. Coy (2002), S.76.

²⁵D.h. nach Kursverlusten des Vermögens wird mehr gespart und nach Kursgewinnen weniger als es dem Durchschnittssparbetrag entspricht. Das soll dazu führen, daß bei niedrigen Kursen automatisch mehr investiert wird als bei hohen, was die Durch-

wird mit dem Cost Average Effekt begründet.²⁶ Weitere Alternativenvergleiche im Zusammenhang mit dem Cost Average Effekt betreffen Fragen, wie man optimal desinvestiert,²⁷ insbes. ob ein angespartes risikoreich angelegtes Altersvorsorgevermögen vor der Entnahmephase sukzessive oder am Beginn der Entnahmephase in einem Schlag oder nach dem Beginn in Tranchen in sicherere Assets umgeschichtet werden soll.²⁸

Eine ähnliche Vielfalt wie bei den vorgenommenen Vergleichen findet sich bei den zugrundegelegten Entscheidungskriterien. Stephan und Telöken vergleichen verschiedene Strategien mit dem Kriterium des Return on Investment (ROI), also einem statischen Renditemaß, mit den bekannten Vor- und Nachteilen dieses Instrumentes.²⁹ Viele Autoren benutzen Risk-Return-Maße wie die Sharpe Ratio. Es werden Ausfallrisikomaße (Ausfallvarianz) und Value at Risk-Maßgrößen verwendet. Erwartete Erträge werden statt mit dem traditionellen μ auch mit Chance-Maßen gemessen. In Fallstudien wird auch mit absoluten Endvermögensbeträgen gearbeitet.³⁰

1.3 Anforderungen an Informationen

Insgesamt gesehen spräche allein die Vielzahl wissenschaftlicher Untersuchungen zum Cost Average Effekt dafür, daß dieser Effekt als ausreichend erforscht beiseite gelegt werden könnte. Andererseits aber verbleibt auch ein gewisses Unbehagen, weil kaum eine der Untersuchungen direkt auf die Darstellungen eingeht, mit denen Kapitalanlagen nach dem CAE beworben werden. Vielmehr nähern sich die jeweiligen Forscher dem CAE in unterschiedlichsten Kontexten und selbst gesetzten Annahmen. Es drängt sich die Frage auf, welcher der vielen wissenschaftlich untersuchten Fälle genau der ist, der in einer bestimmten Situation der Anlageberatung einem verkäuferischen Argument entgegenzuhalten wäre?

Nehmen wir als Beispiel die Werbebroschüre der DWS³¹, in der sehr einfache Kursprozesse als Grundlage für Beispielrechnungen herangezogen

schnittsrendite erhöht.

²⁶Vgl. Langer, Nauhauser (2003), S.1ff, Coy (2002), S.76.

²⁷Vgl. Coy (2002), S.76.

²⁸Vgl. Albrecht, Dus, Maurer, Ruckpaul (2002), S.14 und Langer, Nauhauser (2003), S.16f.

²⁹Vgl. Stephan, Telöken (1998), S.321.

³⁰Vgl. Ebertz, Scherer (1998), S.85.

³¹Siehe DWS Investments (2003).

wurden. Die Ergebnisse können auch ohne Taschenrechner leicht nachvollzogen werden. Es ist völlig eindeutig: der Cost Average Effekt wirkt tatsächlich auf die gezeigte Weise und führt zu Überrenditen. Bei den gezeigten Kursverläufen ist die Cost Average Strategie nicht sinnlos. Wenn dem aber so ist, dann sind – zumindest in Bezug auf diesen Aspekt – alle wissenschaftlichen Erkenntnisse überflüssig, die mit anderen Zahlenbeispielen oder mit historischen Kursverläufen verschiedenster Zeiträume arbeiten. Insofern entwickeln sich die werbende Finanzwirtschaft und die analysierende Wissenschaft aneinander vorbei – es wird der Praxis sehr leicht gemacht, die wissenschaftlichen Ergebnisse bei ihren Marketingbemühungen nicht zu berücksichtigen.

Allerdings hat die Rechtsprechung den Intermediären in ihrer Freiheit, wissenschaftliche Erkenntnisse zu mißachten, Grenzen gesetzt. In Deutschland müssen die von Intermediären verbreiteten Informationen gewisse Mindestinhalte besitzen, die man je nach Situation aus der Rechtsprechung zu Auskunfts-, Aufklärungs-, Beratungs-, Warn- und Erkundigungspflichten ableiten kann.³² So umfaßt die *Aufklärung* die Mitteilung all der Tatsachen, die zur Beurteilung eines Sachverhaltes erforderlich sind. *Auskünfte* betreffen Tatsachen, die für das zukünftige geschäftliche Vorgehen des Auskunftersuchenden von Bedeutung sind, soweit die Sachverhalte vom Auskunftersuchenden benannt wurden. *Beratung* beinhaltet neben der Aufklärung auch die Bewertung und Einschätzung der Tatsachen und die Verknüpfung der Tatsachen mit dem individuellen Wohlergehen des Beratungssuchenden.³³

Die Aufklärung muß sorgfältig, vollständig, sachlich richtig und für den Kunden verständlich erteilt werden. Der Anleger muß derart informiert werden, daß er danach selbst die Entscheidung treffen kann. Dem Einleger müssen alle Chancen, Risiken und Eigenschaften der Anlage mitgeteilt werden, die für seine Entscheidung wesentlich sind oder sein können.³⁴

Und damit sind wir auf der Spur für den richtigen Umgang mit Empfehlungen von Intermediären hinsichtlich des Cost Average Effektes. Informationen, in denen mit dem Cost Average Effekt zum Kauf von Kapitalanlagen animiert wird, erfüllen in vielen Fällen mindestens den Tatbestand

³²Vgl. Lenenbach (2002); Schwintowski, Schäfer (1997).

³³Vgl. Schwintowski, Schäfer (1997).

³⁴Vgl. Schwintowski, Schäfer (1997).

der Aufklärung. Sie müssen also geeignet sein, den Anleger so über CA basierte Anlagestrategien zu informieren, daß er Kenntnis über die wichtigsten Vor- und Nachteile bekommt, um dann selbst zu einer im Sinne der Investitionsrechnung optimalen Entscheidung gelangen zu können. Zu einer optimalen Entscheidung kann man aber nur kommen, wenn gewisse Anforderungen an die Darstellung (i) der Maßnahme an sich (d. h. Klarstellung der empfohlenen Strategie), (ii) der zukünftigen Umweltzustände, (iii) der Zielfunktion und (iv) der Handlungsalternativen erfüllt sind. Die vorgeschlagene Strategie muß bei den zu erwartenden Umweltzuständen zu vorteilhaften Ergebnissen führen; sie darf nicht durch andere Strategien dominiert werden. Es muß deutlich werden, welche Zielfunktion den gemachten oder den sich aufdrängenden Empfehlungen zugrunde liegt. Die empfohlene Strategie muß diejenige sein, die bei der angenommenen Zielfunktion und den angenommenen Umweltzuständen die optimale ist.³⁵

Wie viele werbende Informationen mit dem CAE zeigen, scheuen sich Finanzintermediäre vor konkreten Kursprognosen. Sie unterlassen es, zukünftige Umweltzustände zu prognostizieren, und verweisen stattdessen auf historische Zeiträume oder verwenden fiktive Beispiele. Gleichzeitig wird im Unklaren gelassen, welche Zielfunktion der Beispielinvestor hat, für den Empfehlungen abgegeben werden. Damit wird ein wichtiger Eckpfeiler der Anforderungen an sachgerechte Aufklärung verfehlt.³⁶ Gleichwohl

³⁵Als Beispiel einer Information, die diese Anforderungen nicht erfüllt, sei die Broschüre zum Cost Average Effekt der DWS GmbH (s. DWS Investment, 2003) genannt: Die DWS stellt darin fest „*Mit einem Investmentsparplan der DWS investieren Sie zu jedem Zeitpunkt kaufmännisch richtig.*“ Diese Aussage gründet sich auf einer Darstellung der Cost Average basierten Strategie, die mit Beispielen verdeutlicht wird. Zusätzlich wird festgestellt: „*Beachten Sie bitte, daß es sich lediglich um Beispiele handelt. Wertentwicklungen der Vergangenheit bieten keine Gewähr für zukünftige Ergebnisse.*“ Insgesamt wird an keiner Stelle im Prospekt eine Aussage über zu erwartende Kursprozesse gemacht. Damit entpuppt sich die Aussage, die CA basierte Strategie sei „zu jedem Zeitpunkt“ richtig, als falsch, denn es gibt Kursprozesse, bei denen dies nicht der Fall ist. Ein zweiter Fehler unterläuft der DWS im Zusammenhang mit den implizit verwendeten Zielfunktionen des beispielhaft betrachteten Anlegers. Aus den Beispielen läßt sich erschließen, daß ein risikoneutraler Anleger unterstellt wird, der eine Maximierung des Erwartungswertes des Endvermögens anstrebt. Für ein solches Wirtschaftssubjekt wäre aber bei den gezeigten Kursverläufen eine Strategie nutzenmaximierend, bei der nur bei Kursen unterhalb des Erwartungswertes gekauft oder eine Einmalanlage vorgenommen wird. Die CA basierte Strategie der DWS entpuppt sich nicht als „richtig“.

³⁶Vgl. hierzu auch Hofmann, Thießen, Weber, Wunderlich (2003), S.261ff.

ist mit Blick auf die Theorie Effizienter Märkte und die Schwierigkeiten, überlegene Informationen zu produzieren, der Verzicht auf Prognosen verständlich.³⁷ Es stellt sich deshalb die Frage, wie zu verfahren ist, wenn der Intermediär keine Zielfunktion spezifizieren und auch keine individuelle Prognose zukünftiger Kursverläufe anstellen will. Ein solcher Verzicht könnte z.B. immer dann notwendig sein, wenn eine Information unabhängig von einer konkreten Marktphase herausgegeben werden und längere Zeit gültig sein soll, oder auch in den Fällen, in denen der Intermediär über die zu erwartende Kursentwicklung unsicher ist. Wie in Hofmann, Thießen, Weber und Wunderlich³⁸ herausgearbeitet wurde, gibt es hier nur die Möglichkeit, mit einem allgemeinen Kurs- oder Renditeprozeß zu arbeiten, von dem rational handelnde Wirtschaftssubjekte ohne überlegene Informationen auf Märkten einer bestimmten Qualität ausgehen müssen.

Vor diesem Hintergrund stellen wir nun im Folgenden die Frage, ob man unter Zugrundelegung allgemeiner Kurs- oder Renditeprozesse, von denen Wirtschaftssubjekte, die nicht über überlegene Informationen verfügen, ausgehen müssen, mit dem Cost Average Effekt werben kann? Welche Aussagen zulässig, und insbesondere welche Versprechungen sind noch vertretbar?

Im Abschnitt 2 untersuchen wir die Absenkung der Durchschnittskosten pro gekauftem Anteil bei einem langfristigen Sparplan in ein Asset, dessen Kursverlauf durch eine deterministische Seitwärtsbewegung mit regelmäßigen gleichartigen Sinusschwingungen beschrieben wird. Es interessiert, ob aufgrund dieser Betrachtungen optimale Anlageentscheidungen bezüglich der Investitionsfrequenz getroffen werden können. Natürlich ist ein solches stationäres Verhalten der Assetpreise vor allem am Aktienmarkt nicht die Regel. Die Kurse entwickeln sich vielmehr als Pfade (Trajektorien) eines stochastischen Prozesses. Insbesondere zufällig auftretende Wachstums- oder Verlustphasen am Ende von Sparplänen beeinflussen das Endvermögen entscheidend in positiver oder negativer Weise. Im Abschnitt 3 untersuchen wir daher Erwartungswerte und Risiken von Sparplanergebnissen für Kursprozesse, die auf der geometrischen Brownschen Bewegung beruhen und den Bedingungen eines Random Walk entsprechen,

³⁷Vgl. Hockmann, Thießen (2002), S.41ff., insbes. S.43ff.

³⁸Vgl. Hofmann, Thießen, Weber, Wunderlich (2003), S.261ff.; vgl. Hockmann, Thießen (2002), S.46ff.

wie sie die Literatur für Märkte im Informationsgleichgewicht herausgearbeitet hat.³⁹

2. Harmonisches Mittel versus arithmetisches Mittel

2.1 Der Cost Average Effekt aus mathematischer Sicht

Wenn man die zahlreichen Publikationen zum Cost Average Effekt im wirtschaftswissenschaftlichen, finanzmathematischen und vor allem auch finanzberatenden Kontext in den letzten Jahren betrachtet, so ist feststellbar, daß zwar viele verbale Erklärungsversuche angeboten werden, aber nur wenig mathematisch stringente Aussagen zur Formulierung und zum Nachweis dieses Effekts zu finden sind. Am klarsten ist dabei die folgende Aussage⁴⁰: Wenn ein Investor auf der Grundlage eines Sparplans zu jedem der gleichabständigen Zeitpunkte $t_i = (i - 1)\tau$ ($i = 1, \dots, n$) für eine Geldeinheit $A_i = 1/S(t_i)$ (gebrochene) Anteile eines Assets mit den jeweiligen Anteilpreisen $S(t_i) > 0$ erwirbt, um zum Endzeitpunkt $T = n\tau$ über die angesammelten Anteile zu verfügen, so erwirbt er insgesamt $A = \sum_{i=1}^n A_i$ Anteile zum Durchschnittspreis

$$S_{harmonic} = \frac{n}{A} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{S(t_i)}}.$$

Der Durchschnittspreis pro Anteil ist also das *harmonische Mittel* der Assetpreise zu den Investitionszeitpunkten und bekanntlich stets kleiner als das *arithmetische Mittel*

$$S_{mean} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i),$$

sofern nicht alle Werte $S(t_i)$ übereinstimmen. Falls alle Werte übereinstimmen, so sind beide Mittel gleich. Der Investor kauft also mit der konstanten Sparrate im Durchschnitt günstiger, als wenn er zu allen Investitionszeitpunkten jeweils eine feste Anzahl von Anteilen erwerben würde. Er nutzt

³⁹Vgl. Hockmann, Thießen (2002), S.41ff.

⁴⁰Vgl. z.B. Ebertz, Scherer (1998).

somit die Schwankungen des Assetpreises zu seinem Vorteil aus. Dieses insbesondere zur Ankurbelung des Abschlusses von Sparplänen mit konstanter Investitionsrate gern genutzte mathematische Cost Average Argument ist aber nicht sonderlich überzeugend, da niemand auf die Idee käme, einen Sparplan mit konstanter Anzahl zu erwerbender Anteile abzuschließen, denn dessen Cash Flow wäre nahezu unkontrollierbar. Viel wichtiger sind die folgenden zwei Fragen:

1. Wie sollte man bei einem langfristigen Sparplan mit fester Sparrate die Investitionsfrequenz wählen? Lassen sich Vorteile erwarten, wenn man statt jährlicher Einzahlungen vierteljährliche oder monatliche Einzahlungen vornimmt?
2. Ist Sparplan oder Einmalanlage günstiger und welche Vor- und Nachteile haben beide Vorgehensweisen?

Einige deterministische Untersuchungen zur ersten Frage findet man im folgenden Abschnitt 2.2, während sich stochastisch motivierte Antworten auf beide Fragen auch aus Abschnitt 3 ergeben.

2.2 Durchschnittskosten bei Sparplänen in ein Asset mit deterministischer sinusförmiger Preisentwicklung

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen Sparplan mit $T = 40$ Jahren Laufzeit⁴¹, bei welchem jeweils eine Geldeinheit monatlich in ein komplexes Asset investiert wird. Es gibt also mit $\tau = \frac{1}{12}$ (alle Zeiteinheiten in Jahren) $n = 480$ Investitionszeitpunkte $t_i = \left(\frac{i-1}{n}\right) T$ ($i = 1, 2, \dots, n$) mit zugehörigen Assetpreisen $S(t_i)$, die am Sparplanende $T = n\tau = 40$ ein möglichst hohes Endvermögen sichern sollen. Es ist wohl offenkundig, daß der Gesamterfolg des Sparplans wesentlich von der Entwicklung des Assetpreises am Ende des Sparzeitraums beeinflusst wird. Im folgenden Abschnitt 3 werden die dabei möglichen guten und schlechten Sparplanpfade durch stochastische Modellierung entsprechend ihrer Häufigkeit bewertet. Hier soll vorerst ein rein deterministisches Modell eines Marktes in Seitwärtsbewegung betrachtet werden, für welchen ein einheitlicher Assetpreis 1

⁴¹Die Asset Allokation für einen derartigen Sparplan wurde von Hofmann, Thießen, Weber und Wunderlich (2003) umfassend analysiert.

sowohl am Beginn $t = 0$ als auch am Ende $t = T = 40$ und eine regelmäßige sinusförmige Assetpreisentwicklung der Gestalt $S(t) = 1 + a \sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right)$ bzw. $S(t) = 1 \pm a \left|\sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right)\right|$ mit Amplitude $0 < a < 1$ und ganzzahliger Frequenz $\omega > 0$ angenommen werden. Es sollen die folgenden fünf Varianten der Assetpreisentwicklung verglichen werden:

$$(V1) \quad S(t) = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right),$$

$$(V2) \quad S(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right),$$

$$(V3) \quad S(t) = 1 + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right)$$

sowie

$$(V4) \quad S(t) = 1 + \frac{1}{2} \left|\sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right)\right|,$$

$$(V5) \quad S(t) = 1 - \frac{1}{2} \left|\sin\left(\frac{\pi t \omega}{T}\right)\right|.$$

Wir berechnen zum Vergleich für alle fünf Varianten und *ganzzahlige* ω die Durchschnittspreise pro Anteil $S_{harmonic}$ des entsprechenden Sparplans. Für *geradzahlige* ω liefert das arithmetische Mittel S_{mean} wegen der Symmetrie des Kursverlaufs in den Varianten 1–3 systematisch den Wert 1. Für im Vergleich zu n kleine geradzahlige ω findet man als arithmetisches Mittel bei Variante 4 den Wert 1,32 und bei Variante 5 den Wert 0,68. Diese Werte ergeben näherungsweise das normierte Integral $\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$ über den jeweiligen Kursverlauf. Sehr kleine ω entsprechen in diesen Rechnungen einer hohen Investitionsfrequenz. Dagegen lassen wachsende Werte ω Wirkungen einer geringer werdenden Investitionsfrequenz deutlich werden.

Die Tabelle 1 zeigt beispielhaft für eine Periodenlänge von 10 Jahren ($\omega = 8$) den Einfluß, den die prozentuale Amplitude der Assetpreisschwankungen auf den Cost Average Vorteil $\frac{S_{mean} - S_{harmonic}}{S_{mean}}$ in Prozent hat. Wie die Ergebnisse zu den Varianten (V1) – (V3) zeigen, steigt der Cost Average Vorteil überproportional an, wenn sich die Amplitude der Kursschwankung vergrößert. Wenn die Symmetrie der Schwingung durch Betragsbildung zerstört wird und Ausschläge des Assetpreises von der 1 aus nur noch nach oben (Variante 4) oder nach unten (Variante 5) erlaubt werden, so verringert sich der Cost Average Vorteil entscheidend. Dies läßt leider vermuten, daß synthetische Vorteilsszenarien⁴² wie in den

⁴²Vgl. z.B. DWS Investments (2003).

Varianten (V1) – (V3) das Cost Average Phänomen nicht in realistischer Weise charakterisieren. Eine tiefergehende Analyse des Problems scheint die Nutzung stochastischer Modelle der Assetpreisschwankungen zwingend erforderlich zu machen.

Variante	Kursamplitude	Mittelwert S_{mean}	Preis pro Anteil $S_{harmonic}$	Cost Average Vorteil
(V1)	25 %	1,00	0,97	3,2 %
(V2)	50 %	1,00	0,87	13,4 %
(V3)	75 %	1,00	0,66	33,8 %
(V4)	50 %	1,32	1,30	1,6 %
(V5)	50 %	0,68	0,65	4,7 %

Tabelle 1: Cost Average Vorteil in den fünf Varianten für $\omega = 8$

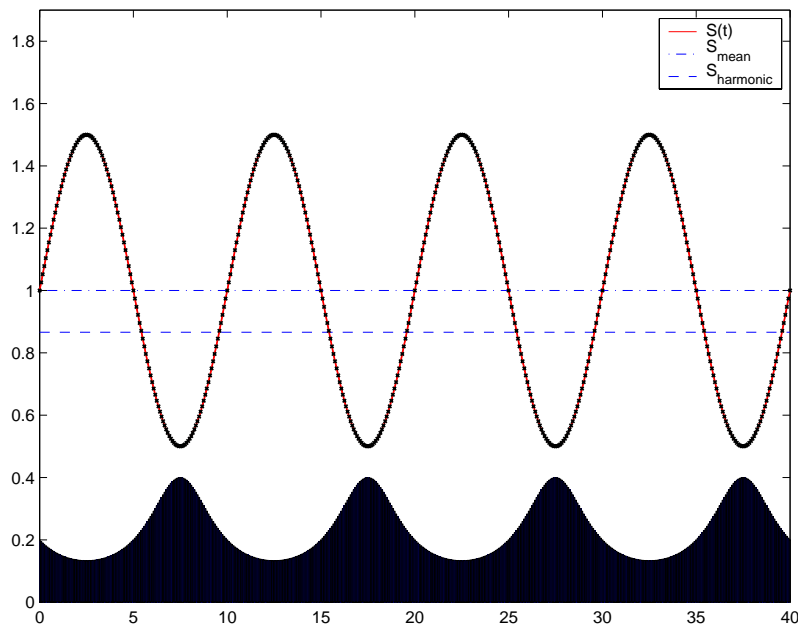


Abbildung 1: Kurs $S(t)$ und erworbene Anteile A_i für (V2) und $\omega = 8$

Zusätzlich zu Tabelle 1 liefert die Abbildung 1 mit horizontaler Zeitachse für die Variante 2 einen optischen Eindruck vom Kursverhalten und dem Unterschied zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel. Das schwarze im Maßstab 1:5 verkleinerte Höhenprofil im unteren Teil der Abbildung repräsentiert die im jeweiligen Investitionszeitpunkt erworbene Anzahl A_i von Anteilen des Assets als Reziprokwert des Kurses $S(t_i)$.

Frequenz ω	Periodenlänge $\frac{2T}{\omega}$ (in Jahren)	Durchschnittskurs S_{mean}	Preis pro Anteil $S_{harmonic}$
1	80,000	1,318309	1,299036
2	40,000	1,000000	0,866025
3	26,666	1,106100	0,974275
4	20,000	1,000000	0,866025
5	16,000	1,063656	0,927878
6	13,333	1,000000	0,866025
7	11,428	1,045465	0,909320
8	10,000	1,000000	0,866025
9	8,888	1,035357	0,899326
10	8,000	1,000000	0,866025
11	7,273	1,028925	0,893079
16	5,000	1,000000	0,866025
17	4,706	1,018705	0,883331
64	1,250	1,000000	0,866025
65	1,231	1,004823	0,870434
479	0,167	1,000003	0,866028
480	0,167	1,000000	1,000000
481	0,166	0,999996	0,866023
959	0,083	0,681691	0,649520
960	0,083	1,000000	1,000000
961	0,083	1,318309	1,299036
2000	0,040	1,000000	0,866025
2001	0,040	1,003837	0,869535

Tabelle 2: Frequenzabhängiger Preis pro Anteil für Variante (V2)

Ebenfalls für Variante 2 listet die Tabelle 2 zu verschiedenen Frequenzen ω , denen eine Periodenlänge der Sinusschwingungen in den Schwankungen des Assetpreises zwischen 80 Jahren und 0,5 Monaten entspricht, den mit dem Sparplan erzielten Preis pro Anteil auf. Zum Vergleich werden auch die arithmetischen Mittel der Assetkurse an den Investitionszeitpunkten mit angegeben. Es wird deutlich, daß sich für *gerade* ganzzahlige Frequenzen ω verblüffend konstante Ergebnisse ergeben, wenn man von der Sondersituation $\omega = kn$ ($k = 1, 2, \dots$) mit identischen Werten $S(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) absieht. Man kann jedoch insgesamt keine optimalen geradzahligen Frequenzen ω hervorheben. Im Umkehrschluß ist die Wahl der Investitionsfrequenz bei solchen regelmäßigen Sinusschwingungen des Assetpreises von nur geringer Bedeutung für das Sparplanergebnis, wenn sich der Assetpreis zu Beginn und am Ende des Sparplans auf dem gleichen Niveau bewegt.

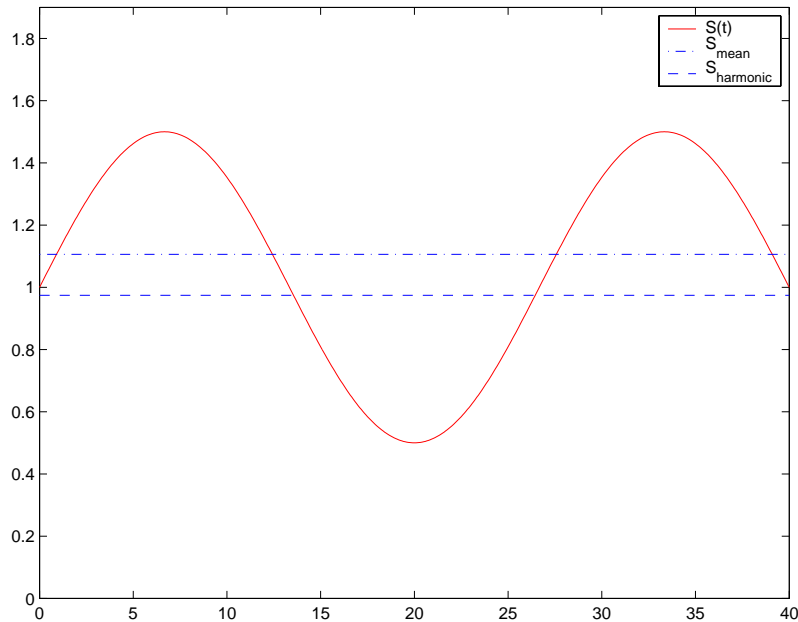


Abbildung 2: Kurs $S(t)$, S_{mean} und $S_{harmonic}$ für (V2) und $\omega = 3$

Wählt man die Frequenz ω als *ungerade* ganze Zahl, so führt die Asymmetrie der Preisschwingung bezüglich der Investitionszeitpunkte zu etwas

mehr unregelmäßigen Schwankungen in den Werten S_{mean} und $S_{harmonic}$ bei Variation von ω (s. Tabelle 2). Wie Abbildung 2 zeigt, verschieben sich für $\omega = 3$ die Werte S_{mean} und $S_{harmonic}$ gegenüber geradzahligem Werten ω beide nach oben. Ihr Abstand bleibt aber fast gleich. Eine Analyse des mathematischen Hintergrunds gelingt wenigstens für die arithmetischen Mittel von (V1) – (V3), welche alle die Gestalt

$$S_{mean} = 1 + \frac{a \sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi\omega i}{n}\right)}{n} = 1 + \frac{a \sin\left(\frac{(n+1)\pi\omega}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi\omega}{2n}\right)}.$$

haben. Für $\omega = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$) folgt daraus wegen $\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) = 0$ sofort $S_{mean} = 1$. Hingegen erhält man für $\omega = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) die Beziehungen

$$1 - \frac{a \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n} \leq S_{mean} = 1 + \frac{a \cot\left(\frac{\pi\omega}{2n}\right)}{n} \leq 1 + \frac{a \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n}.$$

Diese zeigen zum einen, daß die Werte S_{mean} bei ganzzahligem ω nur begrenzte Schwankungen nach oben und unten haben können. Zum anderen erreichen die Werte S_{mean} jeweils für $\omega = 2nk - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) die untere und jeweils für $\omega = 2nk + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) die obere Schwankungsgrenze (s. $\omega = 959$ und $\omega = 961$ in Tabelle 2). Somit existiert *kein Grenzwert* $\lim_{\omega \rightarrow \infty} S_{mean}$. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich wohl auch für das harmonische Mittel $S_{harmonic}$.

3. Sparpläne in ein Asset mit stochastischer Preisentwicklung

3.1 Untersuchungsdesign

In diesem Abschnitt erfolgen die Untersuchungen auf der Basis eines Black-Scholes-Modells eines idealisierten Finanzmarktes.⁴³ Für den Preisverlauf des Assets wird ein Random Walk in Form einer geometrischen Brownschen Bewegung $S(t), t \geq 0$, angenommen. Die Kurse genügen dabei der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t) [\mu dt + \sigma dW(t)] \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad S(0) = S_0.$$

⁴³Vgl. z. B. Korn, Korn (1999), Kwok (1998), Baxter, Rennie (1996), Musiela, Rutkowski (1997).

Dabei bezeichnet μ die mittlere (stetige) Rendite des Assets, $\sigma > 0$ dessen Volatilität und $W(t)$ einen Standard-Wiener-Prozeß. Der Preis des Assets zur Zeit $t > 0$ ergibt sich dann als

$$S(t) = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right],$$

d. h. der Preis zur Zeit t ist eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße, es gilt

$$\ln S(t) \sim \mathcal{N} \left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right).$$

Weiterhin bestehe die Möglichkeit, Barmittel zu einem risikolosen stetigen Zinssatz $r > 0$ anzulegen bzw. zu leihen. Als Parameter werden für unsere Untersuchungen die mittlere Rendite des Assets $\mu = 8\%$, dessen Volatilität $\sigma = 20\%$ und der risikolose stetige Zinssatz $r = 4\%$ gesetzt. Alle Werte verstehen sich auf Jahresbasis. Die Parameterwerte für μ und σ ergeben sich bei Verwendung von Maximum-Likelihood-Schätzungen näherungsweise aus Jahresrenditen des Deutschen Aktienindex DAX der Jahre 1959 bis 2001. DAX-Datensätze anderer Zeitintervalle liefern zum Teil veränderte Driftwerte, während sich die Volatilität kaum ändert.⁴⁴

Um die Wirkungen des Cost Average Effektes studieren zu können, werden im Weiteren exemplarisch die folgenden Anlagealternativen betrachtet. In allen Fällen stehe zu Beginn des Anlagezeitraumes von $T = 40$ Jahren ein Anfangskapital von $x = 1000$ € zur Verfügung.

1. Einmalanlage

Das gesamte zur Verfügung stehende Kapital wird sofort in das Asset investiert, d.h. zur Zeit $t = 0$ werden $\frac{x}{S_0}$ Anteile des Assets erworben und bis zur Zeit $t = T$ gehalten.

2. Sparplan mit jährlicher Einzahlung

Das Kapital wird jährlich vorschüssig in $n = T$ gleichgroßen Teilen der Höhe c_J in das Asset investiert. Mit der letzten Einzahlung ist das gesamte Kapital aufgebraucht. Das noch nicht benötigte Kapital wird mit dem risikolosen Zinssatz r verzinslich angelegt.

⁴⁴Vgl. o.V. (1995); Mazzoni, Weber, Wicki (2001); Morawietz (1994), S.179f., vgl. auch die Berechnungen von Bank, Gerke (2000), S.225, die ohne weitere Begründungen $\mu = 0,12$ und $\sigma = 0,20$ annehmen. Keller (1999), S.107, rechnet mit $\mu = 0,06$.

3. Sparplan mit monatlicher Einzahlung

Das Kapital wird monatlich vorschüssig in $n = 12T$ gleichgroßen Teilen der Höhe c_M in das Asset investiert und ist mit der letzten Einzahlung aufgebraucht. Das noch nicht benötigte Kapital wird ebenfalls mit dem risikolosen Zinssatz r angelegt.

4. Sparplan mit kontinuierlicher Einzahlung

Als Grenzfall einer immer höheren Investitionsfrequenz (jährlich, monatlich, täglich, ...) wird der Fall einer zeitstetigen Anlage mit einer konstanten Investitionsrate c_K betrachtet. In einem Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$ wird dann ein Kapital der Höhe $c_K \Delta t$ in das Asset investiert. Auch in diesem Fall wird das noch nicht benötigte Kapital mit dem risikolosen Zinssatz r verzinst.

Diese vier Anlageformen können auch als spezielle Vertreter einer durch die Anzahl n von Investitionszeitpunkten parametrisierten Familie von Sparplänen angesehen werden. Dabei werden im Zeitraum $[0, T]$ zu den n Zeitpunkten $t_i = \left(\frac{i-1}{n}\right)T$ ($i = 1, 2, \dots, n$) Einzahlungen der jeweils konstanten Höhe c_n vorgenommen. Setzen wir T als ganzzahlig voraus, dann ergeben sich für $n = 1$, $n = T$, $n = 12T$ die Einmalanlage und die Sparpläne mit jährlicher bzw. monatlicher Einzahlung. Der Sparplan mit kontinuierlicher Einzahlung entspricht dem Grenzfall $n \rightarrow \infty$.

Um eine Vergleichbarkeit der verschiedenen Zahlungsströme zu erreichen, werden die konstanten Zahlungshöhen c_n so gewählt, daß sich zum Zeitpunkt $t = 0$ (bezüglich des stetigen Zinssatzes r) jeweils gleiche Barwerte ergeben, die darüberhinaus mit dem Anfangskapital x übereinstimmen. Dies führt zu

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} c_n e^{-rk\left(\frac{T}{n}\right)} = c_n \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-r\left(\frac{T}{n}\right)}}$$

bzw. $c_n = x \frac{1 - e^{-r\left(\frac{T}{n}\right)}}{1 - e^{-rT}}.$ (1)

Damit ergeben sich unter Verwendung der gewählten Parameterwerte ins-

besondere die Höhe der jährlichen bzw. monatlichen Einzahlungen

$$\begin{aligned} c_J &= x \frac{1 - e^{-r}}{1 - e^{-rT}} \approx 49,13 \text{ €} , \\ c_M &= x \frac{1 - e^{-\frac{1}{12}r}}{1 - e^{-rT}} \approx 4,17 \text{ €} . \end{aligned}$$

Die Investitionsrate c_K des Sparplanes mit kontinuierlicher Einzahlung ergibt sich einerseits aus der Beziehung

$$x = \int_0^T c_K e^{-rt} dt = c_K \frac{1 - e^{-rT}}{r}$$

und kann andererseits auch über den Grenzwert der Einzahlungen c_n pro Investitionsintervall T/n für $n \rightarrow \infty$ bestimmt werden, d.h. $c_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{T/n}$. In beiden Fällen führt das zu

$$c_K = x \frac{r}{1 - e^{-rT}} \approx 50,12 \text{ € /Jahr.}$$

Für die genannten Anlagealternativen werden die sich am Ende des Anlagehorizontes ergebenden Endvermögen V ausgewertet. Zur besseren Unterscheidung werden das Endvermögen eines Sparplanes mit n Einzahlungen mit V_n , das Endvermögen der Einmalanlage mit V_E und die Endvermögen der Sparpläne mit jährlicher, monatlicher bzw. kontinuierlicher Einzahlung mit V_J, V_M bzw. V_K bezeichnet. Da es sich in allen betrachteten Fällen wegen der unterstellten zufälligen Dynamik des Assetpreises um Zufallsgrößen handelt, bewerten wir die Erträge durch die jeweiligen Erwartungswerte \mathbf{EV} .

Um neben den Erträgen auch die Risiken der Anlagen bewerten und vergleichen zu können, wird zunächst die Standardabweichung $\sqrt{\mathbf{D}^2 V}$ des Endvermögens bestimmt. Diese eignet sich nur bedingt zur Bewertung von Anlagerisiken, da in deren Berechnung sowohl die (wirklich riskanten) Abweichungen vom Erwartungswert nach unten als auch die (natürlich erwünschten) Abweichungen nach oben eingehen. Aus diesem Grund betrachten wir weitere sogenannte Ausfallrisikomaße.

Hierfür wird eine Ausfallsschranke q vorgegeben, deren Unterschreitung als Risiko interpretiert wird. Für die vorliegende Studie werden für q einerseits das unverzinsten Anfangskapital x sowie andererseits das Endvermögen

einer risikolosen Anlage des Anfangskapitals, d.h. $q = xe^{rT}$ gewählt. Die Anlagen werden also hinsichtlich einer nominalen Kapitalerhaltung bzw. des Erreichens einer Mindestrendite von r untersucht. Das Risiko besteht im Eintreten des zufälligen Ereignisses $\{V < q\}$, welches gleichbedeutend mit $\{V - q < 0\}$ ist. Als einfachstes Ausfallrisikomaß betrachten wir zunächst die Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(V < q)$.

Muß ein Ausfall, d.h. ein negativer Wert von $V - q$ mit einer Zahlung in Höhe der Differenz $q - V$ kompensiert werden, so kann für die Erfüllung dieser Verpflichtung (z. B. von einer Aufsichtsbehörde) die Hinterlegung eines Risikokapitals verlangt werden. Für dessen Bestimmung eignen sich die nachfolgenden Größen, die ebenfalls als Risikomaße dienen können.

(a) **Expected Loss**

$$\text{EL}(V - q) := \mathbf{E} \{(V - q)^-\} = \mathbf{E} \{(q - V)I_{\{V - q < 0\}}\}$$

Expected Loss ist ein Maß für die Höhe des für den Ausfall zu hinterlegenden Risikokapitals. Es ergibt sich als mittlerer Höhe der "Ausfallverluste" $(V - q)^-$, die für $V < q$ den positiven Wert $q - V$ besitzen und anderenfalls gleich 0 sind. Im Unterschied zur Ausfallwahrscheinlichkeit wird hier nicht nur das Eintreten eines Ausfalls, sondern auch die Höhe der Unterschreitung der Ausfallschranke bewertet.

(b) **Value at Risk**

Sei $\alpha \in (0, 1)$ eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit und bezeichne $\varrho_\alpha(V - q)$ das α -Quantil der Verteilung von $V - q$. Im vorliegenden Fall eines stetig verteilten Endvermögens gilt $\mathbf{P}(V - q < \varrho_\alpha(V - q)) = \mathbf{P}(V < \varrho_\alpha(V)) = \alpha$.

Der Value at Risk von $V - q$ definiert als

$$\text{VaR}_\alpha(V - q) := -\varrho_\alpha(V - q)$$

und markiert den Wert, welchen die Zahlungen $q - V$ nur in den schlechtesten $\alpha \cdot 100\%$ Fällen überschreiten. Zur Ausfallwahrscheinlichkeit besteht der Zusammenhang

$$\text{VaR}_\alpha(V - q) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}(V < q) > \alpha,$$

für Ausfallwahrscheinlichkeiten kleiner α ergibt sich ein negativer Value at Risk.

(c) Tail Conditional Expectation

Tail Conditional Expectation wird mitunter auch als Mean Excess Loss bezeichnet und ist zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0, 1)$ definiert als

$$\text{TCE}_\alpha(V - q) := -\mathbf{E}\{V - q | V < \varrho_\alpha(V)\}.$$

Im vorliegenden Fall stetig verteilter Endvermögen bewertet Tail Conditional Expectation den *erwarteten* Wert der Zahlungen $q - V$ in den schlechtesten $\alpha \cdot 100\%$ Fällen. Dagegen liefert der Value at Risk lediglich den *kleinsten* Wert dieser Zahlungen, er ist daher indifferent gegenüber Werten jenseits der durch das Quantil gegebenen Schranke. Man kann zeigen, daß $\text{VaR}_\alpha(V - q) \leq \text{TCE}_\alpha(V - q)$ gilt, d. h. TCE dominiert stets VaR .

Positive Werte der genannten Maße weisen auf inakzeptable Risiken hin, die durch Hinterlegung eines Risikokapitals in Höhe des Risikomaßes zu kompensieren sind. Negative Werte zeigen dagegen an, daß es sich um eine akzeptable riskante Position handelt.

Das zuletzt genannte Maß TCE ist im vorliegenden Fall eines stetig verteilten Endvermögens ein sogenanntes kohärentes Risikomaß im Sinne von Artzner, Delbaen, Eber, Heath⁴⁵. Es erfüllt die Eigenschaften der Translationsinvarianz, Monotonie, Subadditivität und positiven Homogenität. Value at Risk verletzt dagegen die Subadditivität, während Expected Loss nicht translationsinvariant ist.

Im Unterschied zum Erwartungswert und zur Standardabweichung erfordert die Berechnung der Ausfallrisikomaße i.d.R. die vollständige Kenntnis der Verteilung des Endvermögens im Intervall $(0, q]$.

3.2 Charakterisierung der Endvermögen

Im Weiteren sollen nun die zufälligen Endvermögen der verschiedenen Anlagealternativen beschrieben und verglichen werden. Für den Vergleich der Erträge wird der Erwartungswert benutzt, während die Bewertung der Risiken über die Standardabweichung und die eingeführten Ausfallrisikomaße erfolgt.

⁴⁵Vgl. Artzner, Delbaen, Eber, Heath (1999).

Das Endvermögen der Einmalanlage ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der zur Zeit $t = 0$ erworbenen Assetanteile $\frac{x}{S_0}$ und dem Assetpreis zur Zeit $t = T$, d. h.

$$V_E = \frac{x}{S_0} S(T) = x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right).$$

Damit ist V_E eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße und es gilt

$$\ln V_E \sim \mathcal{N} \left(\ln x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right).$$

Für den Erwartungswert und die Standardabweichung ergibt sich dann

$$\mathbf{E}V_E = x e^{\mu T} \quad (2)$$

$$\sqrt{\mathbf{D}^2 V_E} = x \sqrt{e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)}. \quad (3)$$

Die Ausfallrisikomaße lassen sich wegen der bekannten Verteilung von V_E explizit bestimmen.

Bei den Sparplänen mit jährlicher bzw. monatlicher Einzahlung, die sich für $n = T$ bzw. $n = 12T$ Investitionszeitpunkte ergeben, werden zum Zeitpunkt $t = k \frac{T}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$ jeweils $\frac{c_n}{S(k \frac{T}{n})}$ Anteile des Assets erworben und bis zur Zeit $t = T$ gehalten. Für das Endvermögen gilt somit

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_n}{S(k \frac{T}{n})} S(T). \quad (4)$$

Wegen

$$\frac{S(T)}{S(k \frac{T}{n})} = \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(T - k \frac{T}{n} \right) + \sigma \left(W(T) - W \left(k \frac{T}{n} \right) \right) \right) \quad (5)$$

handelt es sich bei V_n um eine Summe (stochastisch abhängiger) logarithmisch normalverteilter Zufallsgrößen. Für das mittlere Endvermögen erhält man (s. Anhang A.1)

$$\mathbf{E}V_n = x e^{\mu T} \frac{1 - e^{-\mu T}}{1 - e^{-\mu \frac{T}{n}}} \frac{1 - e^{-r \frac{T}{n}}}{1 - e^{-r T}}. \quad (6)$$

Während auch die Varianz und somit die Standardabweichung auf analytischem Wege bestimmt werden können (s. Anhang A.1) existieren für

die Verteilungsdichte und damit für die Ausfallrisikomaße bei den Sparplänen mit n Einzahlungen i. allg. keine geschlossenen Ausdrücke. Deren Bestimmung wurde auf der Grundlage einer Monte-Carlo-Simulation vorgenommen (s. Abschnitt 3.5).

Für das Endvermögen des Sparplanes mit kontinuierlicher Einzahlung erhalten wir im Anhang A.3 die Darstellung

$$V_K = c_K \int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma \widetilde{W}(s) \right] ds.$$

mit dem Standard-Wiener-Prozeß $\widetilde{W}(s)$, für den $\widetilde{W}(s) := W(T) - W(T - s)$, $s \in [0, T]$, gilt. Das so entstandene Integral ist in der Literatur als Exponential-Funktional eines Wiener-Prozesses bekannt. Die Berechnung der Momente und der Verteilungsdichte derartiger Funktionale wird in der Literatur⁴⁶ beschrieben und ist im Anhang A.3 dargestellt. Der Erwartungswert als Moment erster Ordnung kann dagegen direkt berechnet werden, es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}V_K &= c_K \int_0^T \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma \widetilde{W}(s) \right] \right\} ds \\ &= c_K \int_0^T e^{\mu s} ds = \frac{r}{1 - e^{-rT}} \int_0^T e^{\mu s} ds \\ &= \frac{r}{\mu} \frac{e^{\mu T} - 1}{1 - e^{-rT}}. \end{aligned} \quad (7)$$

3.3 Erwartungswert der Endvermögen

Benutzt man die im letzten Abschnitt erhaltenen Formeln (2), (6) und (7) für die Berechnung der mittleren Endvermögen ergeben sich für die gewählten Parameter die in Tabelle 3 angegebenen Werte für die vier betrachteten Anlagen.

Es zeigt sich, daß die Einmalanlage hinsichtlich des mittleren Endvermögens den Sparplänen deutlich überlegen ist. Darüberhinaus ist der

⁴⁶Vgl. z.B. Yor (2001).

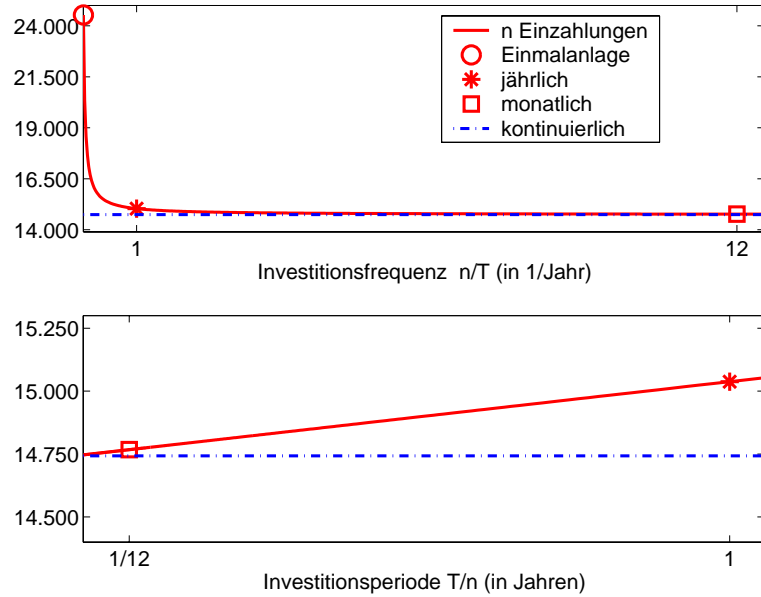


Abbildung 3: Mittleres Endvermögen eines Sparplanes mit n Investitionszeitpunkten als Funktion Investitionsfrequenz $\frac{n}{T}$ (oben) und Investitionsperiode $\frac{T}{n}$ (unten)

Sparplan mit jährlicher Einzahlung denen mit monatlicher bzw. kontinuierlicher Einzahlung überlegen. Die Unterschiede zwischen monatlicher und kontinuierlicher Einzahlung fallen allerdings sehr gering aus. Die beobachteten Relationen sind natürlich für $r < \mu$ zu erwarten, da es (im Mittel) lohnender ist, so zeitig wie möglich in das (im Mittel) ertragreichere Asset zu investieren, als das Kapital mit dem niedrigen Zinssatz r anzulegen. Eine verzögerte Investition bringt stets einen teilweisen Verzicht auf die Equity Premium mit sich, was sich in einem geringerem mittleren Endver-

Einmal	jährlich	monatlich	kontinuierlich
24.533	15.038	14.767	14.743

Tabelle 3: Mittlere Endvermögen in €

mögen niederschlagen muß. Im Anhang A.2 wird gezeigt, daß für beliebige Parameter r und μ mit $r < \mu$ die Ungleichungen

$$\mathbf{EV}_E > \mathbf{EV}_J > \mathbf{EV}_M > \mathbf{EV}_K \quad (8)$$

erfüllt sind, d.h. das mittlere Endvermögen ist als Funktion der Investitionsfrequenz monoton fallend. Abbildung 3 zeigt das mittlere Endvermögen sowohl als Funktion der Investitionsfrequenz $\frac{n}{T}$ als auch der hierzu reziproken Investitionsperiode $\frac{T}{n}$.

3.4 Standardabweichung der Endvermögen

Nach der Betrachtung der Mittelwerte der Endvermögen sollen nun deren Standardabweichungen als erstes Risikomaß untersucht werden. Die Ergebnisse in Tabelle 4 zeigen, daß die Standardabweichungen ebenfalls mit zunehmender Investitionsfrequenz sinken, d.h. zu den geringeren Erträgen gehören auch geringere Risiken. Der Unterschied zwischen monatlicher und kontinuierlicher Einzahlung ist wieder sehr gering.

Einmal	jährlich	monatlich	kontinuierlich
48.776	20.565	19.911	19.852

Tabelle 4: Standardabweichungen der Endvermögen in €

Die Formeln zur Berechnung der Varianzen und damit der Standardabweichungen für die Sparpläne sind im Anhang A.1 zu finden. Abbildung 4 zeigt die Standardabweichung der Endvermögen, wieder sowohl als Funktion der Investitionsfrequenz $\frac{n}{T}$ als auch als Funktion der Investitionsperiode $\frac{T}{n}$.

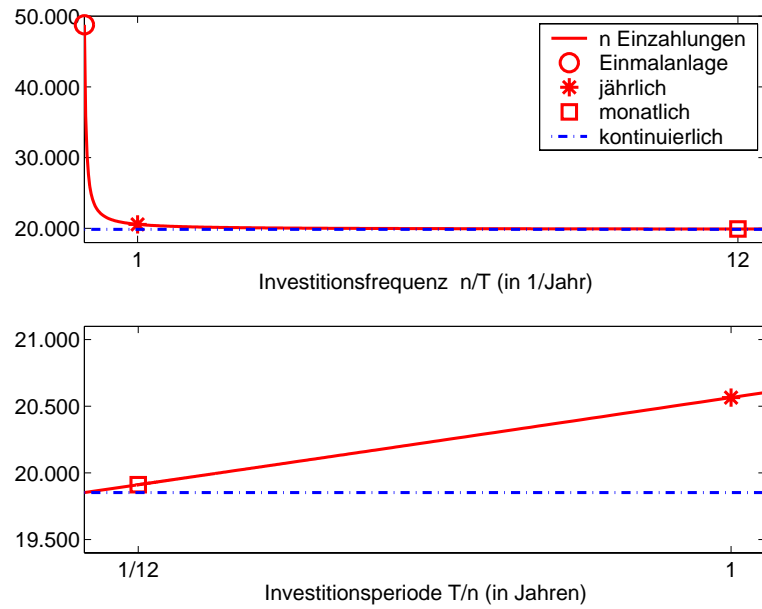


Abbildung 4: Standardabweichung des Endvermögens eines Sparplanes mit n Investitionszeitpunkten als Funktion Investitionsfrequenz $\frac{n}{T}$ (oben) und Investitionsperiode $\frac{T}{n}$ (unten)

3.5 Ausfallrisikomaße der Endvermögen

Tabelle 5 zeigt die Werte der verschiedenen Ausfallrisikomaße, die sich für die beiden Ausfallschranken $q = x = 1.000 \text{ €}$ und $q = xe^{rT} = 4.953 \text{ €}$ ergeben. Es werden die Ausfallwahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(V < q)$, die Maße Expected Loss $\text{EL}(V - q)$, sowie Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(V - q)$ und Tail Conditional Expectation $\text{TCE}_\alpha(V - q)$ jeweils für $\alpha = 1\%$ und $\alpha = 5\%$ berechnet.⁴⁷

Die Berechnung der Ausfallrisikomaße basiert auf den in Abbildung 5 gezeigten Verteilungsdichten $f(v)$ und den Verteilungsfunktionen $F(v)$ für die verschiedenen Endvermögen. Es gilt

$$F(v) = \int_0^v f(s) ds = \mathbf{P}(V \leq v).$$

⁴⁷Die Werte der Ausfallrisikomaße dieser Tabelle sollen am Beispiel der Einmalanlage und der Ausfallschranke $q = x = 1000 \text{ €}$ erläutert werden. Der Wert der Ausfallwahrscheinlichkeit besagt, daß die Einmalanlage das Ziel einer nominalen Kapitalerhaltung (also $V_E \geq x = 1000 \text{ €}$) mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,81% verfehlt. Ein Expected Loss von 9,7 € bedeutet, daß diese Summe im Mittel für die Kompensation der Ausfallverluste in Höhe von $q - V_E = 1000 \text{ €} - V_E$ zu reservieren ist.

Vom Wert des Value at Risk $\text{VaR}_{1\%} = 438,5 \text{ €}$ kann abgelesen werden, daß in den schlechtesten 1% Fällen das Endvermögen V_E die Ausfallschranke $q = 1000 \text{ €}$ um mindestens 438,5 € unterschreitet. Aus der definierenden Beziehung $\mathbf{P}(V - q < -\text{VaR}_{1\%}) = 1\%$ folgt also insbesondere $\mathbf{P}(V < q - \text{VaR}_{1\%} = 1000 \text{ €} - 438,5 \text{ €} = 561,5 \text{ €}) = 1\%$.

Der mittlere Wert dieser Unterschreitungen in den schlechtesten 1% Fällen ist durch $\text{TCE}_{1\%}$ gegeben und beträgt 593,5 € und ist natürlich größer als der Value at Risk, welcher nur den Mindestwert der Unterschreitungen markiert. Das mittlere Endvermögen der Einmalanlage beträgt also in diesen Fällen $1000 \text{ €} - 593,5 \text{ €} = 406,5 \text{ €}$.

Betrachtet man dagegen nicht nur die schlechtesten 1% sondern die schlechtesten 5% der Endvermögen, so sind die Werte in den letzten beiden Zeilen heranzuziehen. Der negative Wert $\text{VaR}_{5\%} = -356,8 \text{ €}$ besagt, daß in den schlechtesten 5% Fällen das Endvermögen höchstens den Wert von $q - \text{VaR}_{5\%} = q - (-356,8 \text{ €}) = 1356,8 \text{ €}$ erreicht, welcher die Ausfallschranke übersteigt. Der negative Wert $\text{VaR}_{5\%}$ korrespondiert darüberhinaus mit der Ausfallwahrscheinlichkeit der Einmalanlage von 2,81%, welche kleiner als die hier vorgegebene Wahrscheinlichkeit von 5% ist. Die betrachteten schlechtesten 5% Fälle enthalten somit sowohl die 2,81% Ausfälle ($V_E < q = 1000 \text{ €}$) als auch 2,19% Nichtausfallsituationen ($1000 \text{ €} \leq V_E < 1356,8 \text{ €}$).

Mit dem positiven Wert $\text{TCE}_{5\%}$ wird dagegen deutlich, daß in den schlechtesten 5% Fällen die Ausfallschranke im Mittel unterschritten wird und zwar um 109,7 €. In diesen Fällen ist also das mittlere Endvermögen gleich $q - \text{TCE}_{5\%} = 1000 \text{ €} - 109,7 \text{ €} = 890,3 \text{ €}$.

$$q = x = 1000 \text{ €}$$

	Einmal	jährlich	monatl.	kontin.
Ausfallwkt. in %	2,81	0,34	0,30	0,27
Expected Loss in €	9,7	0,57	0,48	0,47
VaR _{1%} in €	438,5	-280,0	-320,0	-356,8
TCE _{1%} in €	593,5	-50,2	-87,7	-117,0
VaR _{5%} in €	-356,8	-1.160,0	-1.180,0	-1.218,0
TCE _{5%} in €	109,7	-645,3	-668,1	-686,9

$$q = xe^{rT} = 4.953 \text{ €}$$

	Einmal	jährlich	monatl.	kontin.
Ausfallwkt. in %	26,39	25,31	25,43	25,44
Expected Loss in €	596,6	439,0	437,5	436,9
VaR _{1%} in €	4.391,5	3.673,0	3.633,0	3.596,2
TCE _{1%} in €	4.546,5	3.902,8	3.865,4	3.836,0
VaR _{5%} in €	3.596,2	2.793,0	2.773,0	2.751,2
TCE _{5%} in €	4.063,7	3.307,7	3.284,9	3.266,1

Tabelle 5: Ausfallrisikomaße für die Ausfallschranke $q = x$ (oben) und $q = xe^{rT}$ (unten)

Für eine Ausfallschranke q ergibt sich die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit z.B. direkt aus dem entsprechenden Wert $F(q)$ der Verteilungsfunktion. Während die Verteilungsdichte des logarithmisch normalverteilten Endvermögens V_E der Einmalanlage direkt bestimmbar ist, wurden für die Berechnung der Dichte des Sparplans mit kontinuierlicher Einzahlung die im Anhang A.3 dargestellten Ergebnisse aus der Literatur⁴⁸ benutzt. Für die Sparpläne mit jährlicher bzw. monatlicher Einzahlung entstammen die Dichten einer Monte-Carlo-Simulations-Studie mit 10 Millionen (monatlicher Fall) bzw. 50 Millionen (jährlicher Fall) Realisierungen.

Die Verläufe der Verteilungsdichten zu den Endvermögen der Sparpläne mit jährlicher, monatlicher und kontinuierlicher Einzahlung können in dem in Abbildung 5 dargestellten Bereich visuell nicht unterschieden werden.

⁴⁸Vgl. Yor (2001).

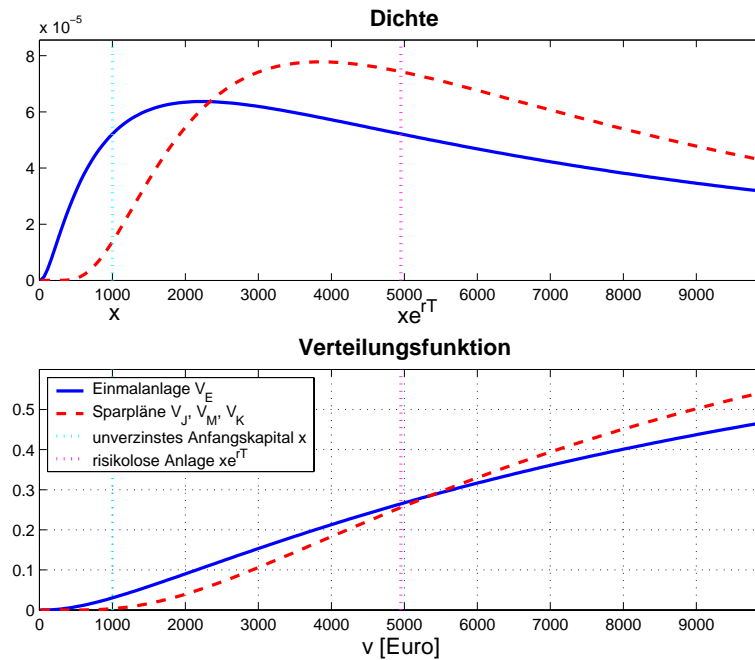


Abbildung 5: Dichte und Verteilungsfunktion der Endvermögen

Die sehr geringen aber dennoch bestehenden Unterschiede in den Verteilungen werden erst durch die verschiedenen Werte der Ausfallrisikomaße in Tabelle 5 aufgedeckt.

Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, daß bei den gewählten Parametern die Sparpläne durchweg geringere Erträge als die Einmalanlage aufweisen. Dabei ist das mittlere Endvermögen sogar eine streng monoton fallende Funktion der Investitionsfrequenz. Diese Eigenschaft wird im Anhang A.2 für beliebige Parameterwerte mit $\mu > r$ bewiesen.

Den geringeren Erträgen stehen aber auch entsprechend geringere Risiken gegenüber. Dies zeigen fast alle der verwendeten Risikomaße, die darüberhinaus wiederum monoton fallend in der Investitionsfrequenz sind. Während die Unterschiede in den Werten der Risikomaße bei den drei betrachteten Sparplänen nur gering ausfallen, weist die Einmalanlage doch signifikant höhere Risiken auf.

Lediglich im Falle der Ausfallwahrscheinlichkeit können sich bei Wahl

einer hinreichend großen Ausfallschranke q auch umgekehrte Effekte ergeben.⁴⁹ In dieser Studie ergeben sich z.B. für $q = xe^{rT}$, d. h. wenn die Ausfallschranke q gleich dem Endvermögen einer risiklosen Anlage des Anfangskapitals x ist, bei allen betrachteten Anlagealternativen nahezu gleiche Ausfallwahrscheinlichkeiten von etwa 25 %. D.h. in etwa einem von vier Fällen unterschreiten die Renditen der Anlagen in das Asset die Rendite der risikolosen Anlage.

Abschließend sei bemerkt, daß bei den in der Studie unterstellten Parameterwerten die Investitionsfrequenz einen kaum merklichen Einfluß sowohl auf die Erträge als auch auf die Risiken der Sparpläne besitzt. Beim gewählten Anlagezeitraum von $T = 40$ Jahren ist es also relativ unerheblich, ob jährlich, monatlich oder sogar noch häufiger investiert wird.

4. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

Fassen wir zusammen. Ziel der Untersuchung war es, die Bandbreite zulässiger Aussagen für Anlagen nach dem Cost Average Prinzip abzuleiten. Dabei wurde dem überwiegenden Tenor werbender Aussagen von Finanzintermediären folgend ein Marktteilnehmer ohne überlegene Informationen angenommen.

In einer ersten Studie (s. Abschnitt 2) betrachteten wir den *mathematischen Kern* des Cost Average Prinzips näher. Dazu haben wir ein Asset betrachtet, dessen Kurs deterministisch im Sinne einer Seitwärtsbewegung des Marktes mit regelmäßigen sinusförmigen Schwingungen um einen Mittelwert schwankt. Weiter gingen wir von einem Investor aus, der regelmäßig einen festen Betrag spart und je nach Kursstand am Kauftag dafür einmal mehr, einmal weniger Anteile am Asset erhält. Ein solches Sparverhalten wird als Cost Average basierte Anlagestrategie bezeichnet. Es zeigt sich, daß in einer Endvermögensbetrachtung der Preis pro erworbenem Anteil bei dieser Sparform stets gleich oder geringer ist als der Durchschnittspreis der Anteile zu den Kaufzeitpunkten (Tab. 1 und 2), weil das harmonische Mittel stets kleiner ist als das arithmetische Mittel, sofern nicht alle Anteilspreise gleich sind. Dies ist das mathematische Herzstück des Cost Average Prinzips.

⁴⁹Dies wurde u.a. auch in der Arbeit Albrecht, Dus, Maurer, Ruckpaul (2002) beobachtet.

Aus dieser mathematischen Gesetzmäßigkeit folgt nun noch nicht, daß im ökonomischen Sinne der Sparplan für Wirtschaftssubjekte ohne überlegene Informationen eine vorteilhafte Investitionsalternative darstellt. Selbst für einen streng seitwärts gerichteten Markt variieren die Ergebnisse relativ stark, je nachdem welche Schwankungsamplitude vorliegt, ob eine gerade oder ungerade Anzahl von Schwingungen auftritt und ob die Schwingungen beidseitig oder nur nach oben bzw. nach unten gerichtet sind. Unterliegt der Markt zusätzlich einem Aufwärts- oder Abwärtstrend, so können die Trendwirkungen die Cost Average Phänomene auch vollständig dominieren. Es ist also nicht so, daß bereits die bloße Existenz von Preisschwingungen die optimale Handlungsalternative – nämlich die Wahl einer Cost Average basierten Anlagestrategie – begründet. Vielmehr gibt es weitere Bedingungen des Marktverlaufs, die dazu kommen müssen. Eine Werbung, die nicht auf die skizzierten Zusammenhänge hinweist, ist demzufolge unvollständig und irreführend.

In einer zweiten Untersuchung (s. Abschnitt 3) haben wir die Annahme eines deterministischen stationären Kursprozesses aufgehoben⁵⁰ und stattdessen eine geometrische Brownsche Bewegung mit den Parametern μ und σ zu Grunde gelegt. Von einem solchen Prozess müssen der Literatur zufolge Marktteilnehmer ohne überlegene Marktinformationen bei Investitionen in viele riskante Assetarten ausgehen. Cost Average basierte Anlagestrategien zeigen sich darin, daß – je nach Handlungsalternativen des jeweiligen Investoren – der Sparplan vor der Einmalanlage präferiert oder ein Sparplan mit einer höheren Investitionsfrequenz einem Sparplan mit einer niedrigeren Investitionsfrequenz vorgezogen wird.

Die Untersuchung erbrachte folgende Ergebnisse: Wenn der mittlere zu erwartende Assetertrag μ über der Rendite des sicheren Assets r liegt, dann ist für risikoneutrale Investoren die Anlage mit früheren Einzahlungen stets vorteilhafter. Sparpläne nach dem Cost Average Prinzip sind damit keine überlegenen Anlageformen. Der Investor muß immer versuchen, so früh wie möglich zu investieren; ein regelmäßiger Sparplan liefert stets ein niedrigeres mittleres Endvermögen als die Einmalanlage.

Bezieht man Risikoaspekte mit ein, ergibt sich, daß – bei den betrach-

⁵⁰Ein sich seitwärts bewogender Markt mit einheitlichem Assetpreis am Anfang und Ende des Investitionszeitraumes war wesentliche Voraussetzung in Abschnitt 2.

teten sehr langen Anlagezeiträumen von 40 Jahren – sowohl die Standardabweichung des Endvermögens als auch die Werte der betrachteten Ausfallrisikomaße (die die Gefahr des Unterschreitens eines vorgegebenen Endvermögens bewerten) mit zunehmender Investitionsfrequenz bis hin zur kontinuierlichen Anlage gegenüber der Einmalanlage drastisch vermindert werden können. Insofern kann Werbung mit dem Cost Average Prinzip berechtigt sein: wer nach dem Cost Average Prinzip spart und seine Investitionen zeitlich streckt, verzichtet zwar auf Ertrag, wird aber mit einer Risikominderung belohnt.

Es zeigt sich auch, daß eine immer weiter zunehmende Investitionsfrequenz immer weniger zusätzlich ertrags- und risikomindernd wirkt.⁵¹ Ab einem gewissen Punkt kann für größere Anlagefrequenzen kaum noch ein praktisch relevanter zusätzlicher Risikosenkungsbeitrag erzielt werden. Insbesondere der Übergang von jährlichen zu monatlichen Sparraten hat (bei dem hier betrachteten Gesamtanlagezeitraum von 40 Jahren) ökonomisch vollkommen unbedeutende Risikominderungswirkungen. Dieses Ergebnis ist insofern wichtig, als viele Finanzdienstleister dazu übergegangen sind, Verwaltungskosten verursachungsgerecht zu belasten. Bei Lebensversicherungen kann die monatliche Beitragszahlung im Vergleich mit der jährlichen mit Renditenachteilen von bis zu einem ganzen Prozentpunkt verbunden sein. Wenn derartigen Mehrkosten keine beachtlichen Risikosenkungswirkungen gegenüberstehen, lohnen Sparpläne mit hohen Investitionsfrequenzen nicht.

Die Ergebnisse von Abschnitt 3 zeigen aber auch, daß die Rahmenbedingungen (wie etwa der Gesamtanlagezeitraum) sowie die Wahl der Risikopräferenzen großen Einfluß auf die Ergebnisse haben können. Das wird besonders am Risikomaß der Ausfallwahrscheinlichkeit deutlich, welche hier bei einer Ausfallschranke, die dem unverzinsten Anfangskapital entspricht, mit zunehmender Investitionsfrequenz deutlich absinkt, während

⁵¹Bei dem hier angenommenen 40-jährigen Gesamtanlagezeitraum ergibt sich beispielsweise ausgehend von einer Einmalanlage beim Übergang zu einer zweimaligen Anlage (Investitionsperiode 20 Jahre), daß das mittlere Endvermögen von 24.533 € auf 20.344 € und die Standardabweichung von 48.776 € auf 35.899 € absinkt. Beim Übergang von einem 2-Jahres-Rhythmus hin zur jährlichen Anlage (auch hier wird die Investitionsfrequenz verdoppelt) sinkt der Erwartungswert nur von 15.332 € auf 15.038 € und die Standardabweichung von 21.294 € auf 20.565 €.

bei einer auf der risikolosen Anlage basierenden Ausfallschranke ein anderes Verhalten zu beobachten ist.

In der Konsequenz ergibt sich, daß eine auf den risikoneutralen Investor zielende Werbung nicht mit dem Cost Average Effekt argumentieren darf, für diesen ist die Einmalanlage die dominierende Strategie, während eine an den typischen risikoaversen Investor der Realität gerichtete Werbung darauf hinweisen muß, daß bei Cost Average basierten Strategien

- (i) Risikominderung mit Ertragsverzicht erkaufte werden muß, und
- (ii) sehr kurze Sparperioden mit fast keinen zusätzlichen risikosenkenden Effekten verbunden sind.

Ein Hinweis auf die Kostenkonsequenzen häufiger kleiner Einzahlungen ist unerlässlich. Wenn mit konkreten Investitionsfrequenzen geworben wird – z.B. für *monatliche* Sparpläne – muß gezeigt werden, relativ zu welchen alternativen Investitionsfrequenzen die monatliche Sparweise optimal sein soll.

Literatur

ALBRECHT, P., DUS, I., MAURER, R., RUCKPAUL, U. (2002), Cost Average-Effekt: Fakt oder Mythos? In: Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 140, Universität Mannheim

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, M., HEATH, D. (1999), Coherent Measures of Risk, in: Mathematical Finance, Vol.9, S.203-228

BALVERS, R., MITCHELL, D. (2000), Efficient Gradualism in Intertemporal Portfolios, in: Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 24, S.21-38

BANK, M., GERKE, W. (2000), Spezialfonds als Instrument im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung, in: Handbuch Spezialfonds, hrsg. von J.M. Kleeberg und C. Schlenger, Bad Soden, Heft 04, S. 214-229

BAXTER, M. W., RENNIE, A. (1996), Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge University Press, Cambridge

COY, P. (2002), Sometimes the best game plan is the easiest, in: Business Week, Nr. 3766 v. 21.1.2002, S.76

DRESCHER UND CIE (2003), Der Cost-Average-Effekt in Aktion, in: <http://www.finanzpartner.de/news/print.php?sid=67> (19.12.2003)

DWS INVESTMENTS (2003), Der Cost-Average-Effekt. Richtig investieren – mit längerfristigen Aktienfondssparplänen, Ausgabe 1/2003, Informationsschrift der DWS Investment GmbH, Grüneburgweg 113-115, Frankfurt

EBERTZ, T., SCHERER, B. (1998), Cost Averaging, Fakt oder Fiktion?, in: die Bank, Heft 2, S.84-87

GUERIN, T. (2002), The power of dollar-cost averaging, in: Greater Baton Rouge Business Report, Vol. 20, S.11

HALL, A. (2000), The Mysteries of Averaging, in: Greater Baton Rouge Business Report, Vol.19, Nr.7, S.36

HOFMANN, B., THIESSEN, F., WEBER, V., WUNDERLICH, R. (2003), Vermögensaufteilung für die Altersvorsorge: wie fundiert sind langfristige Allokationsregeln? in: ZBB, Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft, 15. Jg., Heft 4, S.261-276

HOCKMANN, J., THIESSEN, F. (2002), Investment Banking, Stuttgart

KELLER, CH. (1999), Die Zukunft der gesetzlichen Rentensysteme in

der Europäischen Union, Köln

KLÖCKNER, B., (2002), Cost Average-Effekt. Wer auch in Krisenzeiten spart, gewinnt, in: Versicherungsmagazin, Heft 10, S.56-57

KNEPPER, D. (2003), Dollar Cost Averaging, in: Journal of Accountancy, Vol. 196, S.17

KORN, R., KORN, E. (1999), Optionsbewertung und Portfoliooptimierung, Braunschweig

KWOK, Y.-K. (1998), Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, Singapore

LANGER, T., NAUHAUSER, N. (2003), Gibt es einen Cost-Average-Effekt?, unveröffentlichtes Manuskript, Lehrstuhl für ABWL, Finanzwirtschaft, insbes. Bankbetriebslehre, Universität Mannheim

LEGGIO, K., LIEN, D. (2003), An Empirical Examination of the Effectiveness of Dollar-Cost Averaging Using Downside Risk Performance Measures, in: Journal of Economics and Finance, Nr. 2, Vol.27, S.211-233

LEGGIO, K., LIEN, D. (2003b), Comparing Alternative Investment Strategies Using Risk-Adjusted Performance Measures, in: Journal of Financial Planning, Vol. 16, Nr.1, S.82-87

LENENBACH, M. (2002), Kapitalmarkt- und Börsenrecht, Köln

LIBIN, K. (2003), Shared Prices, in: Canadian Business, Vol. 76, Nr.3, S.21

MAZZONI, C., WEBER, M., WICKI, B. (2001), Chancen und Risiken an den Finanzmärkten, in: Financial Markets and Portfolio Management, Volume 15, Nr. 2, S. 212-230

MILEVSKY, M. (2003), A continuous-time re-examination of dollar-cost averaging, in: International journal of theoretical and applied finance, Vol. 6, S.173-194

MORAWIETZ, M. (1994), Rentabilität und Risiko deutscher Aktien- und Rentenanlagen seit 1870, Wiesbaden

MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M. (1997), Martingale Methods in Financial Modelling, Berlin

o.V. (1995), Aktien sind unter langfristigen Gesichtspunkten nicht risikoreicher als Renten, in: FAZ, 12.12.1995, S. 28

PATRICK, J. (1996), The benefits of using dollar cost averaging, in: Westchester County Business Journal, Vol. 35, S.33-38

SAMUELSON, P. (1994), The Long Term Case for Equity, in: The Journal of Portfolio Management, Herbst 1994, S.15-24

SCHERER, B., EBERTZ, T. (2003), Cost Averaging: An Expensive Strategy for Maximising Terminal Wealth, in: Financial Markets and Portfolio Management, Vo. 17, Heft 2, S.186-193

SCHWINTOWSKI, H.-P. UND SCHÄFER, F. (1997), Bankrecht: Commercial Banking, Investment Banking, München

STÄCKER, K. (1999), Aktienfonds: Mit Sparplänen sind die Chancen am größten, in: Bank und Markt und Technik, 28. Jg., Heft 5, S.31-33

STATMAN, M. (1995), A behavioural framework for dollar-cost averaging, in: The Journal of Portfolio Management, Heft 1, Vol. 22, S.70-78

STEPHAN, T., TELÖKEN, K. (1997), Sparplan versus Einmalanlage: Der Cost-Average-Effekt, in: Die Bank, Heft 10, S.616-619

STEPHAN, T., TELÖKEN, K. (1998), Cost Averaging versus Einmalanlage, in: Die Bank, Heft 5, S.321

YOR, M. (2001), Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes, Berlin

WALZE, M., EISENHOFER, A., WETTACH, A. (2003), Cost Averaging versus Buy-and-Hold, in: Dichtl. H., u.a. (Hrsg.), Handbuch Asset Management, Bad Soden, S.439-456

A. Anhang

A.1 Erwartungswert und Varianz von Sparplänen mit n Einzahlungen

Zur Berechnung von Momenten zu logarithmisch normalverteilten Zufallsgrößen verwenden wir im folgenden die Tatsache, daß für $Z \sim N(a, b^2)$ gilt

$$\mathbf{E}(e^Z) = e^{a + \frac{b^2}{2}}, \quad \mathbf{D}^2(e^Z) = e^{2a + b^2} (e^{b^2} - 1).$$

Offenbar folgt aus (4)

$$\mathbf{E}V_n = c_n \cdot \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^2 V_n = (c_n)^2 \cdot \mathbf{D}^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} \right).$$

Insbesondere zur Vereinfachung der Berechnung der Varianz des Endvermögens bietet es sich an, die Beziehung (5) wie folgt umzuformen. Aus dem Wiener-Prozeß $W(t)$ wird vermöge

$$\widetilde{W}(s) := W(T) - W(T - s)$$

ein Prozeß $\widetilde{W}(s)$, $s \in [0, T]$ konstruiert. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $\widetilde{W}(s)$ wieder ein Wiener-Prozeß ist. Mit $t_k := T - k\frac{T}{n}$ ($k = 0, \dots, n-1$) ist dann

$$\frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} = \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k + \sigma \widetilde{W}(t_k) \right]. \quad (9)$$

Betrachten wir zunächst den Erwartungswert von $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mu t_k} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mu (T - k\frac{T}{n})} = \sum_{k=1}^n e^{\mu k\frac{T}{n}} = \sum_{k=1}^n \left(e^{\mu\frac{T}{n}} \right)^k \\ &= \frac{e^{\mu\frac{T}{n}(n+1)} - e^{\mu\frac{T}{n}}}{e^{\mu\frac{T}{n}} - 1} = \frac{e^{\mu T} - 1}{1 - e^{-\mu\frac{T}{n}}}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (1) erhält man schließlich Formel (6) für den Erwartungswert des Sparplans mit n Einzahlungen.

Zur Berechnung der Varianz beachtet man

$$\mathbf{D}^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbf{cov} \left(\frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})}, \frac{S(T)}{S(l\frac{T}{n})} \right).$$

Aus (9) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{cov} \left(\frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})}, \frac{S(T)}{S(l\frac{T}{n})} \right) &= \mathbf{E} \left(\exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_k + t_l) + \sigma \left(\widetilde{W}(t_k) + \widetilde{W}(t_l) \right) \right] \right) \\ &\quad - \mathbf{E} \left(\exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k + \sigma \widetilde{W}(t_k) \right] \right) \mathbf{E} \left(\exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_l + \sigma \widetilde{W}(t_l) \right] \right). \end{aligned}$$

Beachtet man

$$\left(\widetilde{W}(t_k) + \widetilde{W}(t_l) \right) \sim N \left(0, 3 \min\{t_k, t_l\} + \max\{t_k, t_l\} \right),$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{cov} \left(\frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})}, \frac{S(T)}{S(l\frac{T}{n})} \right) &= \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_k + t_l) + \frac{\sigma^2}{2} (3 \min\{t_k, t_l\} + \max\{t_k, t_l\}) \right) \\ &\quad - \exp(\mu(t_k + t_l)) \\ &= \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 \min\{t_k, t_l\}) - 1 \right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S(T)}{S(k\frac{T}{n})} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 t_k) - 1 \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 t_l) - 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 t_k) - 1 \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 t_k) - 1 \right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \exp(\mu(t_k + t_l)) \left(\exp(\sigma^2 t_k) - 1 \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\mu t_k) \left(\exp(\sigma^2 t_k) - 1 \right). \end{aligned}$$

Einsetzen von $t_k = T - k\frac{T}{n}$ liefert schließlich für die Varianz des Sparplans mit n Einzahlungen die Formel

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 V_n &= 2(c_n)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \exp\left(\mu\left[2T - k\frac{T}{n} - l\frac{T}{n}\right]\right) \left(\exp\left(\sigma^2\left[T - k\frac{T}{n}\right]\right) - 1\right) \\ &\quad + (c_n)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2\mu\left[T - k\frac{T}{n}\right]\right) \left(\exp\left(\sigma^2\left[T - k\frac{T}{n}\right]\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Auf eine weitere analytische Auswertung dieser Formel soll an dieser Stelle verzichtet werden.

A.2 Monotonieverhalten der Erwartungswerte bezüglich n

Zum Beweis der Beziehung (8) aus Abschnitt zeigen wir, daß das mittlere Endvermögen $\mathbf{E}V_n$ für $0 < r < \mu$ eine streng monoton fallende Funktion der Anzahl n von Investitionszeitpunkten ist. Auf Grund von Formel (6) genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$f(n) := \frac{1 - e^{-r\frac{T}{n}}}{1 - e^{-\mu\frac{T}{n}}}$$

streng monoton fallend ist. Die Funktion f kann für beliebige positive reelle Argumente ν definiert werden. Wir zeigen, daß die 1. Ableitung $f'(\nu)$ für alle $\nu > 0$ negativ ist, woraus die behauptete Monotonie für alle $\nu = n \in \mathbb{N}$ folgt.

Mit der Quotientenregel ergibt sich

$$f'(\nu) = \frac{-e^{-\frac{rT}{\nu}} \left(\frac{rT}{\nu^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{\mu T}{\nu}}\right) + e^{-\frac{\mu T}{\nu}} \left(\frac{\mu T}{\nu^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{rT}{\nu}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\mu T}{\nu}}\right)^2}.$$

Es gelten die folgenden Äquivalenzen.

$$\begin{aligned} f'(\nu) < 0 &\iff \mu e^{-\frac{\mu T}{\nu}} \left(1 - e^{-\frac{rT}{\nu}}\right) < r e^{-\frac{rT}{\nu}} \left(1 - e^{-\frac{\mu T}{\nu}}\right) \\ &\iff \mu \left(e^{\frac{rT}{\nu}} - 1\right) < r \left(e^{\frac{\mu T}{\nu}} - 1\right) \\ &\iff \frac{e^{\frac{rT}{\nu}} - 1}{r} < \frac{e^{\frac{\mu T}{\nu}} - 1}{\mu} \\ &\iff g(r) < g(\mu) \end{aligned}$$

mit

$$g(z) := \frac{e^{\frac{T}{\nu}z} - 1}{z} \quad \text{für } z > 0.$$

Die Behauptung ist gezeigt, wenn $g(z)$ eine streng monoton wachsende Funktion ist, da dann aus $r < \mu$ die Relation $g(r) < g(\mu)$ folgt, die äquivalent zu $f'(\nu) < 0$ ist.

Für $g'(z)$ erhält man wiederum mit der Quotientenregel

$$g'(z) = \frac{\frac{T}{\nu} e^{\frac{T}{\nu}z} \cdot z - (e^{\frac{T}{\nu}z} - 1)}{z^2} = \frac{e^{\frac{T}{\nu}z} \left(\frac{T}{\nu}z - 1 \right) + 1}{z^2}.$$

Wegen $\frac{T}{\nu} > 0$ gilt $e^{\frac{T}{\nu}z} > 1 + \frac{T}{\nu}z$ und somit

$$e^{\frac{T}{\nu}z} \left(\frac{T}{\nu}z - 1 \right) + 1 > \left(1 + \frac{T}{\nu}z \right) \left(\frac{T}{\nu}z - 1 \right) + 1 = \left(\frac{T}{\nu}z \right)^2 - 1 + 1 > 0.$$

Damit folgt, daß $g'(z) > 0$ ist und g eine streng monoton wachsende Funktion ist.

A.3 Verteilung des Endvermögens eines Sparplanes mit kontinuierlicher Einzahlung

Für das Endvermögen V_K gilt

$$\begin{aligned} V_K &= \int_0^T \frac{c_K}{S(t)} S(T) dt \\ &= c_K \int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W(T) - W(t)) \right] dt \\ &= c_K \int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma (W(T) - W(T - s)) \right] ds. \end{aligned}$$

($\widetilde{W}(s), s \in [0, T]$) mit $\widetilde{W}(s) = W(T) - W(T - s)$ ist wieder ein Standard-Wiener-Prozeß, damit gilt

$$V_K = c_K \int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma \widetilde{W}(s) \right] ds. \quad (10)$$

Mit den Substitutionen $u = \frac{\sigma^2}{4}s$ und $B(u) = \frac{\sigma}{2}\widetilde{W}(\frac{u}{\sigma^2/4})$, wobei $B(u)$ wiederum einen ein Standard-Wiener-Prozess ist, erhält man die in der Literatur benutzte Standardform eines solchen Exponential-Funktional

$$V_K = \frac{4c_K}{\sigma^2} \int_0^p e^{2(\nu u + B(u))} du = \frac{4c_K}{\sigma^2} A_p^{(\nu)}$$

mit $p = \frac{\sigma^2}{4}T$ und $\nu = \frac{2\mu}{\sigma^2} - 1$.

Für die Dichte $g(u)$ von $A_p^{(\nu)}$ ergibt sich die Darstellung⁵²

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3 p}} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{p} - \nu^2 p - \frac{1}{u}\right)\right] u^{\nu-1} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty x^\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\left(ux^2 + \frac{y^2}{p}\right) - x \cosh y\right] \sinh y \sin \frac{\pi y}{p} dy dx.$$

Das Doppelintegral kann numerisch berechnet werden. Über die Rücktransformation kann schließlich die Dichte $f(v)$ von V_K erhalten werden, d. h.

$$f(v) = \frac{\sigma^2}{4c_K} g\left(\frac{\sigma^2}{4c_K}v\right).$$

Für das zweite Moment von V_K gilt⁵³

$$E(V_K^2) = \frac{2}{\sigma^4} \left[c_0^{(\eta)} + c_1^{(\eta)} e^{\mu T} + c_2^{(\eta)} e^{(\sigma^2 + 2\mu)T} \right] \quad \text{mit} \quad \eta := \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned} c_0^{(\eta)} &:= \frac{1}{(\eta + 1)(2\eta + 1)}, \\ c_1^{(\eta)} &:= \frac{-4}{(2\eta + 1)(2\eta + 3)}, \\ c_2^{(\eta)} &:= \frac{1}{(\eta + 1)(2\eta + 3)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Varianz aus $\mathbf{D}^2 V_K = \mathbf{E}V_K^2 - (\mathbf{E}V_K)^2$.

⁵²Vgl. Yor (2001), S.61.

⁵³Vgl. Yor (2001), Folgerung 2, S.33.

Autoren:

Bernd Hofmann, Prof. Dr. rer. nat., *1953. Studium in Chemnitz, Zusatzstudien in Warschau und Moskau. Promotion und Habilitation Technische Universität Chemnitz. Ingenieurausbildung an der TH Zittau als Professor für Mathematik. Fellow der Alexander von Humboldt-Stiftung (Krupp-Stipendium). Professor für Mathematik (Analysis) an der TU Chemnitz. Bücher und Artikel zur Mathematik inverser Probleme, Regularisierungstheorie und zu finanzmathematischen Anwendungen.

Matthias Richter, Dr. rer. nat., *1972. Studium der Mathematik in Chemnitz, Promotion Technische Universität Chemnitz. Wissenschaftlicher Assistent an der Bauhaus-Universität Weimar. Juniorprofessur Finanzmathematik an der Technischen Universität Chemnitz. Arbeiten zur stochastischen Analysis und zu finanzmathematischen Anwendungen.

Friedrich Thießen, Prof. Dr. rer. pol., *1957. Studium in Köln, Frankfurt und den USA. Promotion Universität Köln. Habilitation Universität Frankfurt. Stipendien des DAAD und des Institute for Humane Studies in Washington. Shell AG, Hamburg, und Hoechst AG, Frankfurt. Professor für Finanzwirtschaft und Bankbetriebslehre an der Technischen Universität Chemnitz. Bücher und Beiträge zum Internationalen Finanzsystem, Internetbanking, Risikokapital. Direktor des Rhein-Main-Institut, Darmstadt.

Ralf Wunderlich, Prof. Dr. rer. nat., *1963. Studium der Mathematik in Chemnitz, Promotion und Habilitation Technische Universität Chemnitz. Vertretung einer Professor für Stochastik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Professor für Mathematik an der Westsächsischen Hochschule Zwickau. Arbeiten zur Stochastik und zu finanzmathematischen Anwendungen.