Gezillmerter Ausgabeaufschlag bei Sparplänen

Bei vielen Sparplänen wird ein Ausgabeaufschlag auf jede Monatsrate erhoben. Dieser Ausgabeaufschlag wird in Prozent angegeben und versteht sich als Aufschlag auf den – zunächst unbekannten - Teil *r'* einer vollen Rate *r*, der tatsächlich investiert wird. Es gilt also:

$$r' = (1+a) = r$$

Dies kann so umgeformt werden, dass man sieht, wie die tatsächliche Rate r' sich aus der vollen Rate r abzüglich des Ausgabeaufschlags zusammensetzt.

$$r' = r - \frac{a}{1+a} r \tag{1}$$

Bei einem gezillmerter Sparplan werden nun anstelle eines Ausgabeaufschlages *Abschlusskosten A* berechnet aus *z* Prozent der Rate mal der Anzahl aller Raten

$$A = 12 n z r \tag{2}$$

Nun werden diese Abschlusskosten auf die ersten *m* Jahre verteilt. In dieser ersten Phase betragen die monatlichen Raten demnach

$$r' = r - \frac{n}{m} z r \tag{3}$$

in den verbleibenden *n – m* Jahren werden die vollen Raten *r* investiert.

Berechnung der Kapitals am Ende der Sparzeit

Um einen ungezillmerten mit einem gezillmerten Sparplan vergleichen zu können, berechnen wir zunächst die Rentenendwerte beider Sparpläne. Bei einem gegebenen Zeitraum n, einem gegebenen (Jahres-)Zinsfaktor q und monatlicher Zinsgutschrift lautet die Rentenendwertformel, wenn die Raten jeweils am Anfang des Monats gezahlt werden

$$R_n = r \frac{\sqrt[12]{q}\,(q^n - 1)}{\sqrt[12]{q} - 1} \tag{4}$$

Zur schreiben wir dafür zunächst abgekürzt

$$R_n = r\, R(q, n) \tag{5}$$

worin *R(q, n)* der Rentenfaktor ist.

Für unseren ungezillmerten Sparplan erhalten wir nun mit den Raten aus (1)

$$R_n = \left(r - \frac{a}{1+a} r\right) R(q, n)$$

ausmultipliziert erhält man

$$R_n = r\, R(q,n) - \frac{a}{1+a} r\, R(q,n) \tag{6}$$

An der Formel sieht man deutlich, wie sich der Endewert aus einem (theoretischen) Sparplan auf die volle Rate und einem Sparplan auf den (negativen) Ausgabeaufschlag zusammensetzt.

Für die gezillmerte Variante berechnen wir zunächst das Kapital nach *m* Jahren mit den Raten aus (3)

$$R_m = (r - \frac{n}{m} z r)\ R(q, m)$$

Für die restlichen Jahre wird dieses Kapital weiterverzinst, aber zusätzlich wird noch mit den vollen Raten weiter Kapital aufgebaut also

$$R_n = (r - \frac{n}{m} z r)\ R(q, m) q^{(n-m)} + r R(q, n-m)$$

Duch Umformen erhält man

$$R_n = r\ R(q, m) q^{n-m} + r R(q, n-m) - \frac{n}{m} z r\ R(q, m) q^{n-m}$$

Die erste Summand beschreibt einen Sparplan der *m* Jahre lang bespart wird und dann einfach ruht, der zweite Summand beschreibt einen Sparplan mit derselben Rate der genau während dieser Ruhezeit läuft. Man kann diese Summanden also zu einem Sparplan zusammenfassen

$$R_n = r\ R(q, n) - \frac{n}{m} z r\ R(q, m) q^{n-m} \tag{7}$$

Vergleich der beiden Sparpläne

Wir möchten nun abschließend wissen, welchen Ausgabeaufschlag *a* ein normaler Sparplan haben muss, um das gleiche Endkapital anzusammeln wie ein gegebener gezillmerter.

Wir setzen dazu die Rentenendwerte aus (6) und (7) gleich und erhalten

$$\frac{a}{1+a} r\ \ R(q, n) = \frac{n}{m} z r\ \ R(q, m)\ q^{n-m}$$

und somit

$$\frac{a}{1+a} = z \frac{n}{m} \frac{R(q, m)}{R(q, n)} q^{n-m}$$

Wir setzen schließlich die Rentenfaktoren ein (*siehe (4) und (5)!*)

$$\frac{a}{1+a} = z \frac{n}{m} \frac{q^m - 1}{q^n - 1} q^{n-m} \tag{8}$$

und lösen nach *a* auf

$$a = \frac{1}{1 - z \frac{n}{m} \frac{q^m - 1}{q^n - 1} q^{n-m}} - 1 \tag{9}$$

Nachsatz: Sollten übrigens bei der Berechnung der Abschlußgebühr eines gezillmerten Sparplans die Gebühren für einen Zeitraum hochgerechnet werden, der kürzer ist als der Zeitraum, den der Sparplan läuft, so kann das *n* in Formel (2) schlicht durch ein abweichendes n' ersetzt werden. Formel (9) ändert sich dann entsprechend

$$a = \frac{1}{1 - z \frac{n'}{m} \frac{q^m - 1}{q^n - 1} q^{n-m}} - 1 \tag{10}$$