Voraussetzungen:

1) Seien X, Y zwei Anlagen

   mit gleichem Erwartungswert E(Rendite(X)) = E(Rendite(Y)) = R

   aber unterschiedlicher Varianz $\sigma^2(X)<\sigma^2(Y)$

   für jede Periode $[t_i,t_{i+1}]$ $(1 < i < n-1)$

2) Investiert wird zu vorgegebenen Zeiten $\{t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n\}$

3) Investiert wird zum Zeitpunkt t_i die Summe a_i

4) Die prozentuale Entwicklung des Anlagenkurses von X und Y genügt irgendeiner Verteilung, die unabhängig von den vorherigen Aktienkursen ist[1]. Seien $\{X_1,X_2,\ldots X_n\}$, bzw. $\{Y_1,Y_2,\ldots Y_n\}$ die prozentualen Entwicklungen der Anlagen X und Y zwischen den Investionszeitpunkten $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}\}$.

5) der Einfachheit halt halber werden nur Thesaurierende Papiere betrachtet.

6) Betrachtet wird der Wert in Periode t_{n+1}

Beweis:

Satz: Der Erwartungswert der Auszahlung in Periode t_{n+1} ist der Gleiche egal ob man in Anlage X oder in Anlage Y investiert.

Beweis:

Zu zeigen: $\mathbf{E_{n+1}(X) = E_{n+1}(Y)}$

a_1 wird im Zeitpunkt t_1 investiert, verzinst sich also

im ersten Jahr mit X_1,

dann mit X_2,

dann mit X_3

...

1Unabhängig bedeutet, dass nur weil die Kurse gestern gefallen sind ändert das nichts an der Wahrscheinlichkeit um viele % die Aktienkurse heute steigen oder fallen. Falls man diese Annahme verneinen würde, gäbe es bessere Strategien als das gewöhnliche Ratensparen, je nach Abhängigkeit der Kursveränderung von der Vergangenheit.

dann mit X_n

insgesamt: Rendite(a_1, X) = $a_1 * \prod_{i=1}^{n} X_i = a_1 * X_1 * X_2 * ... * X_n$

a_j wird im Zeitpunkt t_j investiert, verzinst sich also

im ersten Jahr mit X_j,

dann mit X_{j+1},

...

dann mit X_n

insgesamt: Rendite(a_j, X) = $aj * \prod_{i=j}^{n} X_i = a_j * X_j * X_{j+1} * ... * X_n$

analog für Y.

Die Gesamtrendite zum Zeitpunkt t+1 ist

$$\text{Rendite}_{t+1}(X) = \sum_{i=1}^{n} Rendite(a_i, X)$$

⇒ zu zeigen ist:

$E(\text{Rendite}_{t+1}(X)) \quad = \quad E(\text{Rendite}_{t+1}(Y))$

⇒ nach einsetzen:

$$\mathbf{E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_n+a_2*X_2*X_3*\ldots X_n+\ldots a_{n-1}*X_{n-1}*X_n+a_n*X_n)}$$

$$=$$

$$\mathbf{E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_n+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_n+\ldots a_{n-1}*Y_{n-1}*Y_n+a_n*Y_n)}$$

Induktionsanfang (These gilt für n = 1):

$E(a_1*X_1) = E(a_1*Y_1)$ klar siehe 1)

Induktionsvoraussetzung:

$$E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_n+a_2*X_2*X_3*\ldots X_n+\ldots a_{n-1}*X_{n-1}*X_n+a_n*X_n)$$

$$=$$

$$E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_n+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_n+\ldots a_{n-1}*Y_{n-1}*Y_n+a_n*Y_n)$$

Induktionsschluss:

$$E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_{n+1}+a_2*X_2*X_3*\ldots X_{n+1}+\ldots a_n*X_n*X_{n+1}+a_{n+1}*X_{n+1})$$
$$=$$
$$E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_{n+1}+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_{n+1}+\ldots a_n*Y_n*Y_{n+1}+a_{n+1}*Y_{n+1})$$

<=> mit stochastischer Unabhängigkeit (Auflösung der Summe)

$$E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_{n+1}+a_2*X_2*X_3*\ldots X_{n+1}+\ldots a_n*X_n*X_{n+1})+E(a_{n+1}*X_{n+1})$$
$$=$$
$$E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_{n+1}+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_{n+1}+\ldots a_n*Y_n*Y_{n+1})+E(a_{n+1}*Y_{n+1})$$

<=> Distributivgesetz:

$$E((a_1*X_1*X_2*\ldots X_n+a_2*X_2*X_3*\ldots X_n+\ldots a_n*X_n)*X_{n+1})+E(a_{n+1}*X_{n+1})$$
$$=$$
$$E((a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_n+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_n+\ldots a_n*Y_n)*Y_{n+1})+E(a_{n+1}*Y_{n+1})$$

<=> mit stochastischer Unabhängigkeit (Auflösung des Produkts)

$$E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_n+a_2*X_2*X_3*\ldots X_n+\ldots a_n*X_n)*E(X_{n+1})+a_{n+1}*E(X_{n+1})$$
$$=$$
$$E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_n+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_n+\ldots a_n*Y_n)*E(Y_{n+1})+a_{n+1}*E(Y_{n+1})$$

<=> mit 1)

$$E(a_1*X_1*X_2*\ldots X_n+a_2*X_2*X_3*\ldots X_n+\ldots a_n*X_n)$$
$$=$$
$$E(a_1*Y_1*Y_2*\ldots Y_n+a_2*Y_2*Y_3*\ldots Y_n+\ldots a_n*Y_n)$$

<=> Induktionsvorausstezung

q.e.d