wartungswert' und ,Streuung' auf eine Spezifizierung der Umweltzustände sind Prognose der Eintrittswahrscheinlichkeiten bzw. der (bedingten) Renditen verzichtet werden kann. Die Anwendung der „klassischen" Stichprobentheorie ermöglicht nämlich eine vergleichsweise einfache Schätzung von $\bar{r}$ und σ. In der Folge wird der Schätzer für den Erwartungswert mit $\hat{r}$ und der für die Standardabweichung mit $\hat{\sigma}$ bezeichnet. Für N Beobachtungen (äquidistante Periodenlängen vorausgesetzt) erhält man:

Erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert:

$$\hat{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i \,. \tag{3.14}$$

Erwartungstreuer Schätzer für die Varianz[1]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \hat{r})^2 \,. \tag{3.15}$$

Obige Schätzer dürfen nur bedingt als Erwartungswert bzw. Streuung der Rendite*verteilung* angesehen werden. Korrekterweise ist nämlich über $\ln(1+r_i)$ aufzusummieren, da nur für die kontinuierliche Rendite (asymptotische) Normalverteilung unterstellt werden kann. Da aber i.d.R. Tages- bzw. Wochenrenditen zur Schätzung herangezogen werden und für vergleichsweise kleine Werte von r_i gilt: $\ln(1+r_i) \approx r_i$, können obige Schätzer aus praktischer Sicht als ausreichende Approximation angesehen werden; dies mag auch die häufige Anwendung obiger Darstellung in der Literatur erklären.

Beispiel 3.9

Für eine Aktie wurden folgende Monatsrenditen gemessen:

Monat	r%	Monat	r%
1	–0,40	11	5,49
2	2,59	12	–0,63
3	1,63	13	–3,14
4	9,29	14	–4,38
5	–1,52	15	–0,91
6	4,48	16	–3,78
7	6,90	17	–1,49
8	5,21	18	–0,73
9	4,44	19	9,52
10	–4,04	20	1,95

[1] Zur Herleitung des erwartungstreuen Schätzers $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz σ^2 siehe Anhang 3.1. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht gezeigt werden kann, daß $\hat{\sigma}$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung σ ist.

Lösung:

ad a)
Gemäß Formel (3.14) bzw. (3.15) erhält man:

$$\hat{r} = \frac{1}{20} \cdot (-0{,}40 + \ldots + 1{,}95) = 1{,}524\% \text{ p.m.}$$

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{1}{19} \cdot [(-0{,}40 - 1{,}524)^2 + \ldots + (1{,}95 - 1{,}524)^2] \right\}^{1/2} = 4{,}319\% \text{ p.m.}$$

Bei *kontinuierlicher* Formulierung der Renditen erhält man:

$$\hat{r}_c = \frac{1}{20} \cdot [\ln(1-0{,}004) + \ldots + \ln(1+0{,}0195)] = 1{,}427\% \text{ p.m.}$$
$$(\hat{=}\, 1{,}438\% \text{ diskret})$$

bzw.

$$\hat{\sigma}_c = \left\{ \frac{1}{19} [(\ln(0{,}996) - 0{,}01427)^2 + \ldots + (\ln(1{,}0195) - 0{,}01427)^2] \right\}^{1/2}$$
$$= 4{,}226\% \text{ p.m.}$$

ad b)

$$\hat{r}\,(\text{p.a.}) = 12 \cdot 1{,}524\% = 18{,}288\% \text{ p.a.} \qquad (\hat{=}\, 16{,}795\% \text{ p.a. kontinuierlich})$$

bzw.

$$\hat{\sigma}\,(\text{p.a.}) = \sqrt{12} \cdot 4{,}319\% = 14{,}962\% \text{ p.a.}$$

Für den kontinuierlichen Fall erhält man annähernd das gleiche Resultat:

$$\hat{r}_c\,(\text{p.a.}) = 12 \cdot 1{,}427\% = 17{,}128\% \text{ p.a.} \qquad (\hat{=}\, 18{,}682\% \text{ p.a. diskret})$$
$$\hat{\sigma}_c\,(\text{p.a.}) = \sqrt{12} \cdot 4{,}226\% = 14{,}640\% \text{ p.a.}$$

3.3.2 Zum Wahlverhalten „typischer" Investoren

In einem ersten Schritt sollen die bisherigen Ausführungen systematisch dargestellt bzw. ergänzt werden:

- Der „typische" Investor ist grundsätzlich risikoscheu und daher bemüht, Risiko zu vermeiden bzw. zu reduzieren. Seine Präferenzen werden durch strikt konkave Risikonutzenfunktionen erfaßt.
- Dem Wahlverhalten der Investoren wird unterstellt, daß sie bei gleichem Risiko das Wertpapier(portefeuille) mit der höheren erwarteten Rendite bzw. bei

wartungswert' und ‚Streuung' auf eine Spezifizierung der Umweltzustände samt Prognose der Eintrittswahrscheinlichkeiten bzw. der (bedingten) Renditen verzichtet werden kann. Die Anwendung der „klassischen" Stichprobentheorie ermöglicht nämlich eine vergleichsweise einfache Schätzung von $\bar{r}$ und σ. In der Folge wird der Schätzer für den Erwartungswert mit $\hat{r}$ und der für die Standardabweichung mit $\hat{\sigma}$ bezeichnet. Für N Beobachtungen (äquidistante Periodenlängen vorausgesetzt) erhält man:

Erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert:

$$\hat{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i \,. \tag{3.14}$$

Erwartungstreuer Schätzer für die Varianz[1]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \hat{r})^2 \,. \tag{3.15}$$

Obige Schätzer dürfen nur bedingt als Erwartungswert bzw. Streuung der Rendite*verteilung* angesehen werden. Korrekterweise ist nämlich über $\ln(1+r_i)$ aufzusummieren, da nur für die kontinuierliche Rendite (asymptotische) Normalverteilung unterstellt werden kann. Da aber i.d.R. Tages- bzw. Wochenrenditen zur Schätzung herangezogen werden und für vergleichsweise kleine Werte von r_i gilt: $\ln(1+r_i) \approx r_i$, können obige Schätzer aus praktischer Sicht als ausreichende Approximation angesehen werden; dies mag auch die häufige Anwendung obiger Darstellung in der Literatur erklären.

Beispiel 3.9

Für eine Aktie wurden folgende Monatsrenditen gemessen:

Monat	r%	Monat	r%
1	– 0,40	11	5,49
2	2,59	12	– 0,63
3	1,63	13	– 3,14
4	9,29	14	– 4,38
5	– 1,52	15	– 0,91
6	4,48	16	– 3,78
7	6,90	17	– 1,49
8	5,21	18	– 0,73
9	4,44	19	9,52
10	– 4,04	20	1,95

[1] Zur Herleitung des erwartungstreuen Schätzers $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz σ^2 siehe Anhang 3.1. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht gezeigt werden kann, daß $\hat{\sigma}$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung σ ist.

Lösung:

ad a)
Gemäß Formel (3.14) bzw. (3.15) erhält man:

$$\hat{r} = \frac{1}{20} \cdot (-0,40 + \ldots + 1,95) = 1,524\% \text{ p.m.}$$

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{1}{19} \cdot [(-0,40 - 1,524)^2 + \ldots + (1,95 - 1,524)^2] \right\}^{1/2} = 4,319\% \text{ p.m.}$$

Bei *kontinuierlicher* Formulierung der Renditen erhält man:

$$\hat{r}_c = \frac{1}{20} \cdot [\ln(1-0,004) + \ldots + \ln(1+0,0195)] = 1,427\% \text{ p.m.}$$
$$(\hat{=}\, 1,438\% \text{ diskret})$$

bzw.

$$\hat{\sigma}_c = \left\{ \frac{1}{19} [(\ln(0,996) - 0,01427)^2 + \ldots + (\ln(1,0195) - 0,01427)^2] \right\}^{1/2}$$
$$= 4,226\% \text{ p.m.}$$

ad b)

$$\hat{r}\,(\text{p.a.}) = 12 \cdot 1,524\% = 18,288\% \text{ p.a.} \qquad (\hat{=}\, 16,795\% \text{ p.a. kontinuierlich})$$

bzw.

$$\hat{\sigma}\,(\text{p.a.}) = \sqrt{12} \cdot 4,319\% = 14,962\% \text{ p.a.}$$

Für den kontinuierlichen Fall erhält man annähernd das gleiche Resultat:

$$\hat{r}_c\,(\text{p.a.}) = 12 \cdot 1,427\% = 17,128\% \text{ p.a.} \qquad (\hat{=}\, 18,682\% \text{ p.a. diskret})$$
$$\hat{\sigma}_c\,(\text{p.a.}) = \sqrt{12} \cdot 4,226\% = 14,640\% \text{ p.a.}$$

3.3.2 Zum Wahlverhalten „typischer" Investoren

In einem ersten Schritt sollen die bisherigen Ausführungen systematisch dargestellt bzw. ergänzt werden:

– Der „typische" Investor ist grundsätzlich risikoscheu und daher bemüht, Risiko zu vermeiden bzw. zu reduzieren. Seine Präferenzen werden durch strikt konkave Risikonutzenfunktionen erfaßt.
– Dem Wahlverhalten der Investoren wird unterstellt, daß sie bei gleichem Risiko das Wertpapier(portefeuille) mit der höheren erwarteten Rendite bzw. bei