

Die Abb. 3.1.3.-1. wurde mit der Ökonometriesoftware EViews erstellt. In der ersten Spalte sind die Autokorrelationen zu den Lags von eins bis 10 grafisch dargestellt. In der vierten Spalte, unter der Bezeichnung „AC“, sind die tatsächlichen Werte der Autokorrelationen aufgelistet. Die übrigen Spalten sollen hier nicht weiter von Interesse sein. Diese Abbildung zeigt deutlich, dass die Autokorrelation bei den beispielhaft betrachteten stetigen DAX-Tagesrenditen bei einem Lag von eins zwar betragsmäßig am größten sind. Aber selbst diese Autokorrelation ist mit einem Wert von etwa  $-0.1$  eher unbedeutend.

Bei einigen statistischen Methoden, wie z.B. der linearen Regression (siehe Kap. 5.), wird nicht nur die Bedingung der schwachen Stationarität an die zu untersuchende Zeitreihe gestellt, sondern zusätzlich die Unkorreliertheit zwischen den einzelnen Größen<sup>27</sup>. Bei solchen Analysen muss zunächst getestet werden, ob auch tatsächlich keine Autokorrelation besteht, ansonsten dürfen die Methoden nur in einer modifizierten Form verwendet werden.

### 3.1.4. Statistische Eigenschaften diskreter und stetiger Renditen

Damit finanzwirtschaftliche Daten statistisch analysiert werden können, sollten diese die Eigenschaft der schwachen Stationarität besitzen. Originäre Kursreihen weisen diese Eigenschaft im Allgemeinen jedoch nicht auf, da sie trendbehaftet sind. Wie aber in Kap. 3.1.2. schon gezeigt wurde, liegt ein Ausweg in der Differenzenbildung von zeitlich aufeinander folgenden Kurswerten, die dann in der Regel eine schwach stationäre Zeitreihe bilden. Da dieser Vorgang mit der Renditeberechnung konform geht, sollten bei statistischen Analysen die Reihen der Renditen verwendet werden. Wie sich später zeigen wird, bedeutet dies keinen praktischen Nachteil, da Kurse und Renditen problemlos ineinander umgerechnet werden können.

<sup>27</sup> Speziell bei der Regressionsanalyse (Kap. 5.) muss die Reihe der Residuen diese Eigenschaften besitzen.

Die beiden geb  
worden sind, ge

Die *diskrete Re*  
zum Zeitpunkt  
Kapital addiert  
Periode:<sup>28</sup>

$$(1) \quad K_t = K_{t-1}$$

Durch einfache  
formel für die d

$$(2) \quad R_t^d = \frac{K_t}{K_{t-1}}$$

$R_t^d$  ist also die  
Kapitals von Pe  
Rendite  $R_t^s$  be  
Kapital währen  
Eine einmalige  
räume bei kont  
klein, während  
lich) wird.

Das heutige Ka  
mit der stetigen

$$(3) \quad K_t = e^{R_t^s}$$

Der Wert  $e$  ist  
soll in diesem  
ergibt sich nun  
darauf folgende

<sup>28</sup> Es wird ange  
Kapitals  $K_t$  zu  
genden Berec

<sup>29</sup> Eine ausführli

Die beiden gebräuchlichsten Renditeberechnungsarten, die bereits in Kap. 2.2.1. aufgezeigt worden sind, gehen von zwei völlig unterschiedlichen Verzinsungstypen aus:

Die *diskrete Rendite*  $R_t^d$  beruht auf der einfachen Zinsrechnung, wonach das Kapital  $K_{t-1}$  zum Zeitpunkt  $t-1$ , also der letzten Periode, einmal verzinst wird und die Zinsen zu dem Kapital addiert werden. Der Zinssatz  $R_t^d$  bezieht sich also nur auf eine betrachtete Periode:<sup>28</sup>

$$(1) \quad K_t = K_{t-1} + R_t^d \cdot K_{t-1} = (1 + R_t^d) \cdot K_{t-1}$$

Durch einfaches Umstellen dieser Gleichung (1) ergibt sich unmittelbar die Berechnungsformel für die diskrete Rendite:

$$(2) \quad R_t^d = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}$$

$R_t^d$  ist also die relative (gedanklich) einmalig erfolgende Wertänderung des eingesetzten Kapitals von Periode  $t-1$  zu Periode  $t$ . In Gegensatz zu der diskreten Rendite tritt die *stetige Rendite*  $R_t^s$  bei der stetigen Verzinsung auf. Bei diesem Verzinsungsvorgang wird das Kapital während der betrachteten Periode laufend oder kontinuierlich („stetig“) verzinst. Eine einmalige, diskontinuierliche Verzinsung liegt also nicht vor. Die Verzinsungszeiträume bei kontinuierlicher Verzinsung werden innerhalb der betrachteten Periode beliebig klein, während gleichzeitig die Anzahl dieser Zeiträume beliebig groß (im Grenzfall unendlich) wird.

Das heutige Kapital ergibt sich somit aus dem der letzten Periode durch stetige Verzinsung mit der stetigen Rendite  $R_t^s$ :

$$(3) \quad K_t = e^{R_t^s} \cdot K_{t-1}$$

Der Wert  $e$  ist hierbei die Eulersche Zahl 2.71828... Auf die Herleitung<sup>29</sup> dieser Formel (3) soll in diesem Buch verzichtet werden. Die Berechnungsvorschrift für die stetige Rendite ergibt sich nun aus (3) durch Division mit dem Kapital der letzten Periode  $K_{t-1}$  und der darauf folgenden Logarithmierung dieser Gleichung:

<sup>28</sup> Es wird angenommen, dass alle Wertzuwächse des eingesetzten Kapitals im Zinssatz bzw. im Wert des Kapitals  $K_t$  zum Zeitpunkt  $t$  enthalten sind. Andere zwischenzeitliche Erträge werden bei dieser und der folgenden Berechnungsart vernachlässigt.

<sup>29</sup> Eine ausführliche Herleitung findet sich in KÖHLER [(1992), S. 57f.].

$$(4) \quad R_t^s = \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) = \ln(K_t) - \ln(K_{t-1})$$

Die diskrete Rendite  $R_t^d$  und die stetige Rendite  $R_t^s$  sind, wie in (5) und (6) gezeigt wird, einfach ineinander zu überführen:

$$(5) \quad R_t^d = e^{R_t^s} - 1$$

$$(6) \quad R_t^s = \ln(1 + R_t^d)$$

Ein wesentlicher Vorteil der stetigen Renditen besteht in der rechentechnisch einfacheren Vorgehensweise bei der Umrechnung von Ein- in Mehrperiodenrenditen. So lässt sich beispielsweise die stetige Jahresrendite einer Anlage durch Kumulation der stetigen Monatsrenditen berechnen. Analoge Umrechnungen mit diskreten Renditen sind dagegen aufwändiger. Die diskrete  $k$ -Perioden-Rendite ergibt sich aus den diskreten Renditen der einzelnen Perioden in folgender Weise:

$$(7) \quad R_t^d(k) = (1 + R_t^d) \cdot (1 + R_{t-1}^d) \cdot \dots \cdot (1 + R_{t-k+1}^d) - 1 = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}^d) - 1$$

mit  $R_t^d(k)$ : diskrete  $k$ -Perioden-Rendite

Die Berechnungsvorschrift für die stetige  $k$ -Perioden-Rendite lässt sich unter Zuhilfenahme von Formel (6) angewandt auf diskrete und stetige Mehrperiodenrenditen herleiten:

$$\begin{aligned} R_t^s(k) &= \ln(1 + R_t^d(k)) \\ &= \ln\left(1 + \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}^d) - 1\right) = \ln\left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}^d)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \ln(1 + R_{t-i}^d) = \sum_{i=0}^{k-1} R_{t-i}^s \end{aligned}$$

mit  $R_t^s(k)$ : stetige  $k$ -Perioden-Rendite

Zur Berechnung einer stetigen  $k$ -Perioden-Rendite sind also die stetigen Renditen der einzelnen Perioden aufzusummieren:

$$(8) \quad R_t^s(k) = R_t^s + R_{t-1}^s + \dots + R_{t-k+1}^s = \sum_{i=0}^{k-1} R_{t-i}^s$$

Wird nun mit der Analyse oder Prognose von Anlageobjekten begonnen, so muss zunächst entschieden werden, welche der beiden Renditearten für die Untersuchungen benutzt werden soll. Die Verwendung beider Berechnungsarten gemeinsam in einer Untersuchung ist nicht sinnvoll. Die Umrechnungsmethodik von den originären Kursen in die Renditen ist

bei beiden M  
durchgeführt w

Bei einer Anal  
interpretierend  
die Voraussetz  
So ist die Dich  
(vgl. auch Kap.  
verteilt. Weiter  
rie (vgl. Kap. 3  
Optionspreisthe  
ten asymmetris  
scheint die Ann  
Nach dem in K  
aus der Summe  
eine Zufallsvar  
(z.B. die Kursr

Empirische Un  
Normalverteilu  
tet, dass sich di  
lung zulassen  
Normalverteilu  
PETERS (1994)  
jedoch, dass m  
All diese Phän

Statistisch bess  
statt der tatsäch  
verteilung. Hier  
Werte, sodass  
durch die dop  
verloren. Gera  
die Anwendung  
lysen aber trotz  
pretationszweck

Nach einer abg  
stetigen Rendit  
lageobjekts zu  
Umrechnung k

bei beiden Modellen sehr einfach und kann mit Standardsoftware in kürzester Zeit durchgeführt werden.

Bei einer Analyse mit statistischen Methoden ist es jedoch ratsam, die etwas schwerer zu interpretierenden stetigen Renditen zu verwenden. Diese besitzen nämlich Eigenschaften, die Voraussetzungen für die Anwendung vieler statistischer Verfahren und Modelle sind. So ist die Dichte diskreter Renditen häufig nicht symmetrisch, sondern eher rechtsschief (vgl. auch Kap. 3.3.4.). Stetige Renditen dagegen sind eher symmetrisch um ein Zentrum verteilt. Weiter wird bei vielen Modellen, wie z.B. dem  $\mu - \sigma$ -Prinzip in der Portfoliotheorie (vgl. Kap. 3.4. oder Kap. 10.3.) oder dem Black-Scholes-Modell (vgl. Kap. 10.2.) in der Optionspreistheorie, eine Normalverteilung der Renditen vorausgesetzt. Da diskrete Renditen asymmetrisch verteilt sind, können sie diese Voraussetzung nicht erfüllen. Allgemein scheint die Annahme, dass Renditen normalverteilt sind, jedoch nicht unrealistisch zu sein. Nach dem in Kap. 2.5.2. beschriebenen zentralen Grenzwertsatz ist eine Zufallsvariable, die aus der Summe vieler kleiner unabhängiger Effekte besteht, annähernd normalverteilt. Als eine Zufallsvariable mit diesen Eigenschaften kann auch die Rendite von Anlageobjekten (z.B. die Kursrendite von Aktien) angesehen werden.

Empirische Untersuchungen legen die Vermutung nahe, dass für stetige Renditen die Normalverteilungsannahme nicht abgelehnt werden kann. Allerdings wurde auch beobachtet, dass sich die Renditen stärker um den Mittelwert herum häufen als es die Normalverteilung zulassen würde. Ferner liegt ihre Dichte an den Rändern über jener einer Normalverteilung. Sie weisen die sogenannten *heavy tails* (schwere Ränder) auf [vgl. PETERS (1994), S. 18ff.]. Andere Untersuchungen [vgl. KERLING (1998), S. 30ff.] ergaben jedoch, dass monatliche Renditen eher normalverteilt sind als wöchentliche oder tägliche. All diese Phänomene sollten bei statistischen Analysen berücksichtigt werden.

Statistisch bessere Eigenschaften lassen sich durch die Verwendung von *Renditedifferenzen* statt der tatsächlichen Renditen erzielen. Deren Verteilung ähnelt noch stärker der Normalverteilung. Hier sei jedoch zur Vorsicht geraten. Die Renditedifferenzen sind sehr kleine Werte, sodass es zu Problemen bei der Rechengenauigkeit kommen kann. Außerdem geht durch die doppelte Differenzenbildung die Möglichkeit der unmittelbaren Interpretation verloren. Gerade aus dem Grund der Interpretationsmöglichkeit bevorzugen viele Praktiker die Anwendung von diskreten Renditen. Wie oben erwähnt sollten bei statistischen Analysen aber trotzdem die stetigen Renditen verwendet werden. Sie können jederzeit zu Interpretationszwecken mit Formel (5) wieder in die diskreten überführt werden.

Nach einer abgeschlossenen Analyse oder Prognose eines Assets, bei der mit diskreten oder stetigen Renditen gearbeitet wurde, können diese wieder in den tatsächlichen Kurs des Anlageobjekts zurückgerechnet werden. Dies gilt vor allem für berechnete Prognosewerte. Die Umrechnung kann ohne großen Aufwand durch die Formeln (1) bzw. (3) erfolgen.



nen

Performance-  
nisse in der  
en auf statis-  
benenfalls in  
ch-statistisch  
n. Es ist eher  
nen Seite aus-  
vorgestellten

eben, deren  
olomanagers  
zentuale Ver-  
von Einlagen  
ten, die sich  
Mehrperioden-

ndig bekannt  
ls eine Mess-  
unterschied-

urza-  
im Folgenden

liche statistische Maße mit unterschiedlichen Eigenschaften vorgestellt. Und so existieren auch viele unterschiedliche Methoden für die Ermittlung von Renditen, deren sachgerechte Anwendung von den jeweiligen Rahmenbedingungen abhängt.

Die wichtigsten dieser Methoden werden in diesem Kapitel dargestellt. Einige von ihnen sind lediglich Anwendungen der in Kap. 2.3.5.1. beschriebenen empirischen Lagemaße. Da es sich bei allen im Folgenden zu betrachtenden Renditen um bekannte Größen (also Realisationen) handelt, werden sie mit dem kleinen Buchstaben  $r$  und einem zusätzlichen Index gekennzeichnet, der die Berechnungsmethode erkennen lässt.

### 3.2.1. Arithmetische und geometrische Renditeberechnungen

In diesem Abschnitt werden zwei gebräuchliche Renditeberechnungsarten beschrieben, die auf einer Durchschnittsbetrachtung von Renditen mehrerer Perioden basieren. Es ist hier somit nicht die tatsächlich erzielte Rendite von Interesse, sondern die durchschnittliche Rendite pro Periode. Die zwei unterschiedlichen Formen sollen zunächst kommentarlos beschrieben werden. In dem darauf folgenden Beispiel werden jedoch sofort die Probleme deutlich, die bei den Berechnungsformen auftreten.

Die diskrete *arithmetische Durchschnittsrendite*  $r_a^d$  ist das arithmetische Mittel der diskreten Renditen  $r_t^d$  über einen Zeitraum von  $n$  Perioden (siehe dazu Kap. 2.3.5.1. Gleichung (1)).

$$(1) \quad r_a^d = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^d$$

Auch wenn diese Formel exakt dieselbe wie jene in Kap. 3.1.5. Gleichung (2) ist, so besteht doch ein gravierender Unterschied in der Interpretation. In Kap. 3.1.5. wurde diese Durchschnittsrendite (berechnet aus historischen Daten) als Prognose für die zukünftige Rendite verwendet. Hier soll diese mittlere Rendite dagegen eine Maßzahl für vergangene Anlageergebnisse darstellen.

Die diskrete *geometrische Durchschnittsrendite*<sup>31</sup>  $r_g^d$ , die analog zum geometrischen Mittel in Kap. 2.3.5.1. Gleichung (5) gebildet wird, ergibt sich über denselben Zeitraum von  $n$  Perioden aus:

$$(2) \quad r_g^d = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^n (1 + r_t^d)} - 1$$

<sup>31</sup> Eine genaue Herleitung dieser Formel findet sich in HIELSCHER [(1996), S. 35ff.].

## Beispiel: Arithmetische versus geometrische Durchschnittsbildung bei diskreten Renditen

In Tab. 3.2.1.-1. sind die Kurse eines Anlageobjekts zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Die Wertentwicklung wird also über zwei Perioden betrachtet. Zu Beginn der betrachteten Zeit (am Ende der Periode  $t = 0$ ) liegt der Kurs bei 100, ebenso am Ende ( $t = 2$ ). Dazwischen verdoppelt er sich von 100 auf 200 und halbiert sich dann wieder. Die berechneten diskreten Renditen sind in Prozent-Schreibweise in der dritten Spalte eingetragen:

Zeit $t$	Kurs	Rendite
$t = 0$	100	
$t = 1$	200	100%
$t = 2$	100	-50%

Tab. 3.2.1.-1.: Wertentwicklung eines Anlageobjekts im Beispiel

Die diskrete arithmetische Durchschnittsrendite  $r_a^d$  ergibt sich mit (1) ohne Verwendung der Prozent-Schreibweise:

$$r_a^d = \frac{1}{2}(1 + (-0.5)) = 0.25$$

Die diskrete geometrische Durchschnittsrendite  $r_g^d$  berechnet sich nach (2):

$$r_g^d = \sqrt[2]{\prod_{t=1}^2 (1 + r_t^d)} - 1 = \sqrt{(1+1) \cdot (1+(-0.5))} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Die arithmetische Berechnung ergibt somit eine durchschnittliche Rendite von 25%, die geometrische dagegen eine Rendite von null. Offensichtlich ist die Verwendung der arithmetischen Methode in dieser Situation nicht angebracht, da der Endkurs von 100 identisch mit dem Anfangskurs von 100 ist.

Die Abweichungen zwischen den berechneten Durchschnittsrenditen im Beispiel kommen dadurch zu Stande, dass den beiden benutzten Methoden völlig unterschiedliche Annahmen zu Grunde liegen: Die arithmetische Berechnungsweise basiert auf der Annahme, dass jede Periode mit dem gleichen Kapitaleinsatz startet. Der Anleger entnimmt also in jeder Periode die positiven Renditen bzw. gleicht die negativen Renditen durch Einzahlung wieder aus, sodass der Kapitaleinsatz konstant bleibt. Die diskrete arithmetische Durchschnittsrendite kann somit als *durchschnittlich entnommene bzw. eingezahlte Rendite* interpretiert werden. Die Voraussetzung für die arithmetische Berechnung ist im Beispiel nicht erfüllt, da der Kapitaleinsatz einmal 100 (in  $t=0$ ) und einmal 200 (in  $t=1$ ) beträgt. Die geometrische Berechnungsweise hingegen unterliegt der Wiederanlageprämisse. Danach wird der

komplette Bet  
investiert. Di  
schnittlichen  
diese Berech  
schnittlichen  
und wie der Z  
nungsweise au

Bei den oben  
Grunde geleg  
angewendeter  
Wie in Kap. 3  
Renditen der  
liegenden An  
rendite gelten

## 3.2.2. Wertgew

Für Anlagen,  
nen sind, stel  
dieser beiden  
-abflüsse in d  
erst festzuste  
Auszahlungen  
gung von Ein  
spielt.

Beispiel 1: Pr

Die beiden M  
Geldeinheiten  
Perioden erz  
Anlageverhalt  
ten Ein- und  
nämlich gera  
Manager darg

$$(1) \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(R)} = \sqrt{E(R - \mu)^2}$$

mit  $\sigma$ : Volatilität  
 $R$ : Rendite einer Anlage (als Zufallsvariable)  
 $\mu$ : Erwartungswert der Rendite der Anlage

Die Volatilität ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung der zukünftig möglichen Renditen einer Anlage von dem Erwartungswert der Rendite. Dabei ist hier sinnvollerweise die Standardabweichung (also die Wurzel aus der Varianz) zu verwenden, da dieses Maß einfacher interpretiert werden kann als die Varianz. Eine genauere Erklärung hierfür und Rechenregeln für den Umgang mit der Standardabweichung bzw. der Varianz finden sich in Kap. 2.3.2.

Zur Berechnung dieser Formel (1) wird die exakte Verteilung der Zufallsvariablen Rendite und ihr Erwartungswert benötigt. Da diese in der Regel nicht genau bekannt sind, ersetzt man die tatsächliche Standardabweichung der zukünftig erwarteten Rendite einer Anlage durch eine „geschätzte“, die sich folgendermaßen aus den historischen Renditen der letzten  $n$  Zeitpunkte berechnen lässt:

$$(2) \quad \hat{\sigma} = s_r = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}$$

mit  $s_r$ : geschätzte Volatilität  
 $r_t$ : Rendite zum Zeitpunkt  $t$   
 $\bar{r}$ : mittlere Rendite der letzten  $n$  Zeitpunkte  
 $n$ : Anzahl der betrachteten Zeitpunkte

Hier wird zunächst der Erwartungswert der zukünftig möglichen Renditen einer Anlage durch die mittlere Rendite der letzten  $n$  Zeitpunkte geschätzt. Anschließend werden die quadratischen Abweichungen der beobachteten Renditen von ihrem Mittelwert aufsummiert und durch  $n-1$  geteilt. Die arithmetische Durchschnittsrendite ergibt sich nach der in Kap. 3.2.1. dargestellten Formel (1). Da im Allgemeinen immer mit der geschätzten Volatilität gearbeitet wird, soll im Folgenden das Dach über dem Sigma ( $\hat{\sigma}$ ) weggelassen und für die Volatilität einfach der griechische Buchstabe  $\sigma$  verwendet werden.

Diese Berechnungsformel für die geschätzte Volatilität ist bereits mit leicht veränderter Notation in Kap. 2.3.5.2. Gleichung (4) bei Betrachtung der Streuung in einer Messreihe behandelt worden. Tatsächlich gibt die Volatilität, wenn sie mit (2) berechnet wird, nur einen Einblick in die Schwankungen der Renditen zu vergangenen Zeitpunkten. Und doch wird sie häufig in dieser Form als Schätzer für die Streuung der zukünftig möglichen Renditen einer Anlage um ihren Erwartungswert angesehen. Diesem Ansatz liegt die folgende Annahme zu Grunde: Eine Rendite, die in letzter Zeit stark schwankte, wird dies in

nächster Zeit (ver-  
 ren Zeitpunkt in  
 „gute“ Schätzun  
 werden in Kap. 4

Unter der Anna  
 Bedeutung der  
 die beiden Para  
 führt die Norma  
 nämlich nicht di  
 die Varianz. Aus  
 ten verwendet,  
 spricht dann dem



Die Deutsche B  
 „Handelsblatt“  
 darin enthalte  
 einzelnen Aktie  
 durchschnittlich  
 Börsentagen be  
 einen direkten V  
 zogen. Die Bere  
 die 30-Tage-Vol  
 Wochen) wieder  
 (ungefähr ein J

nächster Zeit (vermutlich) ebenfalls tun. Diese unterstellte Eigenschaft soll zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Buch noch einmal aufgegriffen werden. Die Bedingungen für eine „gute“ Schätzung der theoretischen Standardabweichung (1) durch die empirische (2) werden in Kap. 4. behandelt.

Unter der Annahme, dass die Renditen normalverteilt sind, ergibt sich eine besondere Bedeutung der Volatilität (Standardabweichung). Da die Normalverteilung bereits durch die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  (Erwartungswert und Varianz) vollständig bestimmt ist, führt die Normalverteilungsannahme zu entscheidenden Vereinfachungen. Es muss dann nämlich nicht die ganze Verteilung geschätzt werden, sondern nur der Erwartungswert und die Varianz. Aus diesem Grund werden zur Berechnung der Volatilität die stetigen Renditen verwendet, da sie eher der Normalverteilungsannahme genügen. Die Volatilität entspricht dann dem in der Abb. 3.3.1.-1. gekennzeichneten Abstand.

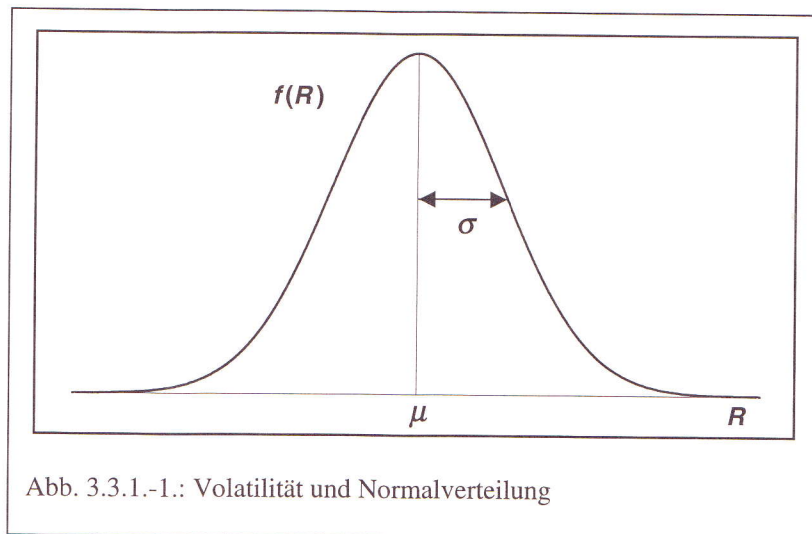


Abb. 3.3.1.-1.: Volatilität und Normalverteilung

Die Deutsche Börse AG veröffentlicht regelmäßig in der Wirtschafts- und Finanzzeitung „Handelsblatt“ verschiedene Risikomaße für den Deutschen Aktienindex DAX und die darin enthaltenen Aktien, darunter auch die mit Formel (2) berechneten Volatilitäten der einzelnen Aktien. Für jeden dieser Titel wird die empirische Standardabweichung, also die durchschnittliche Schwankung der Tagesrendite basierend auf den letzten 30 und 250 Börsentagen berechnet. Man spricht dabei von der 30-Tage- bzw. 250-Tage-Volatilität. Für einen direkten Vergleich dieser beiden Kennzahlen werden die Volatilitäten auf ein Jahr bezogen. Die Berechnungsweise für diese Annualisierung soll später erklärt werden. Während die 30-Tage-Volatilität die Schwankung für einen kurzen Zeitraum (ungefähr sechs Wochen) wiedergibt, zeigt die 250-Tage-Volatilität diejenige für einen längeren Zeitraum (ungefähr ein Jahr) auf. Durch einen Vergleich dieser beiden Volatilitäten kann somit ein

Eindruck über die Entwicklung der Schwankungen der Renditen in der letzten Zeit gewonnen werden.

Zur Vergleichbarkeit von Volatilitäten bedient man sich der Annualisierung. Die annualisierte Volatilität (also die auf ein Jahr bezogene Volatilität) ergibt sich unter bestimmten Bedingungen aus der berechneten Volatilität multipliziert mit der Wurzel aus der Anzahl der Berechnungszeiträume  $T$  während eines Jahres. Die Herleitung dieses Zusammenhangs ist einfach:  $r_i$  ist die Realisation der Zufallsvariablen  $R_i$ , die je nach den verwendeten Daten für eine Tages-, Wochen-, Monats- oder Quartalsrendite steht. Die Anzahl dieser Zufallsvariablen ergibt sich in Abhängigkeit von der Datenstruktur  $T$ . Die (stetige) Jahresrendite  $r_{ann}$  bzw.  $R_{ann}$  lässt sich durch Kumulation der (stetigen) Einzelrenditen während des Jahres berechnen:

$$r_{ann} = \sum_{i=1}^T r_i \text{ (ex post) bzw. } R_{ann} = \sum_{i=1}^T R_i \text{ (ex ante)}$$

Die Varianz der Jahresrendite  $\sigma_{ann}^2$  ergibt sich nun nach

$$\sigma_{ann}^2 = \text{Var}(R_{ann}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^T R_i\right)$$

Sind die Renditen der einzelnen Perioden voneinander unabhängig, so lässt sich die Jahresvarianz nach Formel (7) in Kap. 2.3.2. in die Summe hineinziehen. Ist die Varianz der einzelnen Renditen  $R_i$  außerdem für alle  $i$  konstant  $\sigma^2$ , so folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{ann}^2 &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^T R_i\right) = \text{Var}(R_1) + \text{Var}(R_2) + \dots + \text{Var}(R_T) \\ &= \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{T\text{-mal}} = T \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Die annualisierte Volatilität (Standardabweichung) der Rendite ist somit unter den oben genannten Voraussetzungen

$$(3) \quad \sigma_{ann} = \sqrt{T} \cdot \sigma$$

Ist die Standardabweichung beispielsweise auf der Ebene von Tagesdaten berechnet worden, so muss sie zur Annualisierung mit der Wurzel aus 365 multipliziert werden. Da jedoch empirisch festgestellt wurde [vgl. HILL (1990), S. 156f.], dass der einer Rendite zu Grunde liegende Prozess eher den Handels- als den Kalendertagen folgt, werden die Berechnungszeiträume daraufhin ausgelegt. Daher wird die Standardabweichung von Tages-

daten mit der W  
lichen Zeiträume

$$(4) \quad \sigma_{ann} = \sqrt{4}$$

$$(5) \quad \sigma_{ann} = \sqrt{1}$$

$$(6) \quad \sigma_{ann} = \sqrt{5}$$

$$(7) \quad \sigma_{ann} = \sqrt{2}$$

Beispiel: Volatil

Die zwei Anlag  
verglichen wer  
die Jahresrendite  
Tabelle dargeste

F
F

Tab

Einen ersten Ein  
Renditen über d  
Koordinatensyste  
Rendite der Anla  
nen Punkte mitei

...ierung. Die  
...ch unter be-  
...urzel aus der  
... dieses Zu-  
... je nach den  
...ht. Die An-  
...ktur  $T$ . Die  
...gen) Einzel-

...st sich die  
...die Varianz

...r den oben

... berechnet  
...werden. Da  
... Rendite zu  
...len die Be-  
...von Tages-

daten mit der Wurzel aus 250 (= Börsenhandelstage im Jahr) multipliziert. Bei unterschiedlichen Zeiträumen, für welche die Renditen und Volatilitäten berechnet wurden, gilt:

(4)  $\sigma_{ann} = \sqrt{4} \cdot \sigma$  mit  $\sigma$  = Volatilität der Quartalsrenditen

(5)  $\sigma_{ann} = \sqrt{12} \cdot \sigma$  mit  $\sigma$  = Volatilität der Monatsrenditen

(6)  $\sigma_{ann} = \sqrt{52} \cdot \sigma$  mit  $\sigma$  = Volatilität der Wochenrenditen

(7)  $\sigma_{ann} = \sqrt{250} \cdot \sigma$  mit  $\sigma$  = Volatilität der Tagesrenditen

Beispiel: Volatilitäten zweier Anlagealternativen

Die zwei Anlagemöglichkeiten A und B sollen bezüglich ihrer Volatilität miteinander verglichen werden. Die zu Grunde liegenden Daten für die Berechnung der Volatilität sind die Jahresrenditen der letzten fünf Jahre dieser beiden Anlagen. Diese sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

	1993	1994	1995	1996	1997
Rendite der Anlage A	8%	2%	7%	3%	10%
Rendite der Anlage B	6%	5%	8%	6%	5%

Tab. 3.3.1.-1.: Historische Renditen zweier Anlagen im Beispiel

Einen ersten Eindruck über den Verlauf (und damit auch über die Schwankungen dieser Renditen über die Zeit) erhält man durch eine grafische Darstellung. Trägt man in einem Koordinatensystem auf der  $x$ -Achse (Abzisse) die Zeit und auf der  $y$ -Achse (Ordinate) die Rendite der Anlage ab, so lässt sich die obige Tabelle visuell darstellen. Indem die einzelnen Punkte miteinander verbunden werden, wird die Entwicklung über die Zeit aufgezeigt.

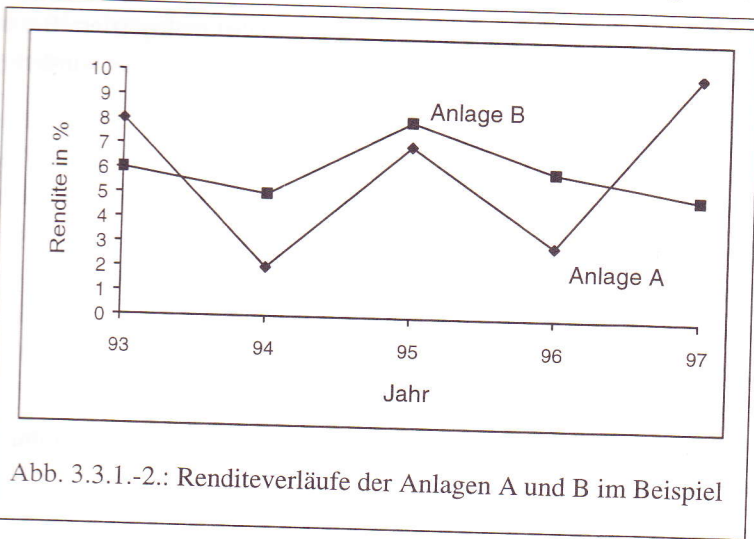


Abb. 3.3.1.-2.: Renditeverläufe der Anlagen A und B im Beispiel

Anhand der Abb. 3.3.1.-2. zu sehen ist, sind die Schwankungen bei Anlage A deutlich größer als die der Anlage B. A ist also „riskanter“. Dieser bereits mit bloßem Auge erkennbare Unterschied soll nun durch die Berechnung der Volatilität mittels Formel (2) nachgewiesen werden. Beide Anlagen weisen über den betrachteten Zeitraum von 1993 bis 1997 eine mittlere (arithmetische) Rendite  $\bar{r}$  von 6% auf. Die Volatilitäten  $\sigma_A$  und  $\sigma_B$  der Anlagen A und B ergeben sich somit über die fünf Zeitpunkte mit:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{t=1}^5 (r_{At} - \bar{r}_A)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} ((0.08 - 0.06)^2 + \dots + (0.1 - 0.06)^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0.0046} = 0.0339 = 3.39\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{t=1}^5 (r_{Bt} - \bar{r}_B)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} ((0.06 - 0.06)^2 + \dots + (0.05 - 0.06)^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0.0006} = 0.0122 = 1.22\%$$

Die Annualisierung der berechneten Volatilitäten ist in diesem Beispiel nicht notwendig. Da die zu Grunde liegenden Renditen als Jahresdaten vorliegen, sind die Volatilitäten bereits annualisiert. Die Volatilität der Anlage A liegt mit 3.39% wesentlich höher als diejenige der Anlage B mit 1.22%. Bei der Entscheidung, welche dieser beiden Anlagealternativen vorzuziehen ist, würde ein risikoscheuer Anleger die Anlage B wählen, da bei beiden Anlagen dieselbe Rendite (6%) zu erwarten ist.

### 3.3.1. Volatilität

Der Vorteil bei der Volatilitätsbewertung liegt in der Einfachheit und einfachen Anwendbarkeit. Aufgrund der wesentlich höheren Komplexität der Optionsbewertung werden in diesem Abschnitt nur die wesentlichen Punkte erwähnt und in ihrer Grundform dargestellt.

Die erste Methode beruht auf der Beobachtung der Optionspreise (vgl. [Black & Scholes, 1973, S. 637ff.]) zur Bewertung von Optionen. Ein wichtiges Element die Volatilität (im Englischen: *Volatility*) der Optionen richtig geschätzt zu bekommen, ist die Festlegung des beobachteten Marktpreises. Die Volatilität der zu Grunde liegenden Unterlyings wird durch die Volatilität aufgelöst werden kann (vgl. [Black & Scholes, 1973, S. 637ff.]). Die so geschätzte Volatilität wird dann vom Marktpreis impliziert unter der Annahme:

- 1) der Markt das Bewertungsmodell korrekt anwendet
- 2) die Marktpreise im Sinne des Modells

Diese Art von Volatilität drückt die relative Schwankung der Renditen einer Aktie aus. Es zeigt sich darin, dass sie nur für wenige Aktien geeignet ist. Bei anderen Optionen auf einem hochentwickelten Markt werden. Der hauptsächlichste Vorteil bei der Bewertung von Marktteilnehmer Optionen auch „implizite“ Volatilität wird auszuführen.

Eine zweite Methode zur Berechnung der Volatilität ist die Beobachtung, dem sogenannten *Volatility* der Wertpapierrenditen über verschiedene Phasen, in denen die Renditen in anderen Perioden dagegen dominanter sind. Es besteht die Tendenz, dass starken Schwankungen in den Renditen folgen. Man könnte nun versuchen, diese zeitlichen Muster zu erklären, die diese zeitlichen Muster zu erklären. In diesem Zusammenhang sind die ARCH- und GARCH-Modelle (vgl. [Engle, 1982, S. 307ff.]), deren Namen aus *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* bzw. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* zusammengesetzt sind. Die grundlegenden Varianten existieren, liegt darin, die

<sup>35</sup> Eine einfache Herleitung und Darstellung findet man in [Black & Scholes, 1973, S. 223ff.].